COLEGIO SAN CARLOS DE QUILICURA
MATEMÁTICA/TERCERO MEDIO
J. VELÁSQUEZ/L. CONTRERAS/2020
SESIÓN 1 (45 minutos)

Solucionario de la Guía de Trabajo N° 31

(Del 30 de noviembre al 04 de diciembre)

Revisa tus respuestas y si tienes alguna duda, comunícate a través del mail:

III° "A" y III° "B": josimar.velasquez@colegiosancarlosquilicura.cl en el siguiente horario: martes y jueves desde las 16:00 hasta las 17:00.

III° "C": loreto.contreras@colegiosancarlosquilicura.cl en el siguiente horario: miércoles y jueves desde las 11:00 hasta las 12:00.

Con gusto atenderemos tus inquietudes. ¡Cuídate mucho!

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE REPASO PARA LA EVALUACIÓN N° 5: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

PREGUNTA 1

Determine cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**.

A) Una función exponencial con base mayor que cero y menor que uno es siempre una función decreciente.

B) Una función exponencial y base fraccionaria siempre es una función decreciente.

C) Una función exponencial con base mayor que 1 es siempre creciente.

D) La gráfica de la función $h(x) = a^x$ con $a > 1$ si se traslada 3 unidades horizontalmente hacia la derecha, se grafica como $h(x-3)$.

E) Una función de la forma $g(x) = a^x$ con $a = 1$ es una recta horizontal.

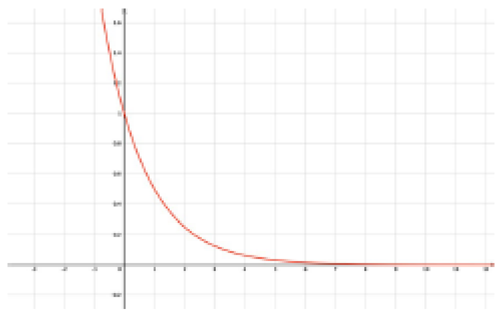
SOLUCIÓN

Revisemos la veracidad de cada una de las alternativas.

a) $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

Elijamos un representante que cumpla las condiciones para ver como se comporta esta función. Digamos $f(x) = 0{,}5^x$

x	y
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625



Por lo tanto, es una función decreciente, así que podemos intuir que el comportamiento para una función con esas condiciones es una función decreciente.

Luego es una función decreciente. Por lo tanto, esta alternativa es verdadera.

b) $f(x) = a^x$ donde a se puede escribir como fracción.

Cuando hablamos de fracción, usualmente pensamos (erróneamente) en un número entre 0 y 1, pero hay que recordar que un número entero positivo, como 2, también puede escribirse de forma fraccionaria $\left(2 = \dfrac{4}{2}\right)$ pensando eso tenemos que $f(x) = 2^x = \left(\dfrac{4}{2}\right)^x$ es una función creciente mientras que $f(x) = 2^x = \left(\dfrac{4}{2}\right)^x$ es decreciente.

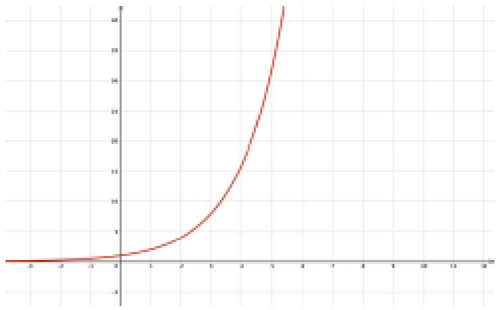
Por lo tanto, no podemos generalizar con "Una función exponencial y base fraccionaria siempre es una función decreciente"

Luego esta alternativa es falsa.

c) $f(x) = a^x$ donde $a>1$

Elijamos un representante que cumpla las condiciones para ver como se comporta esta función. Digamos $f(x) = 2^x$

x	y
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Tenemos una función decreciente, así que podemos intuir que el comportamiento para una función con esas condiciones es una función creciente.

Por lo tanto, esta alternativa es verdadera.

d) Tomemos $a = 2$, para que cumpla con la condición del enunciado, y veamos como se comporta.

x	$h(x)$	$h(x-3)$
2	4	0,5
3	8	1
4	16	2
5	32	4

$$\boldsymbol{h(x) = 2^x}$$

$$h(x) = 2^2 = 4$$

$$h(x) = 2^3 = 8$$

$$h(x) = 2^4 = 16$$

$$h(x) = 2^5 = 32$$

$$\boldsymbol{h(x-3) = 2^x}$$

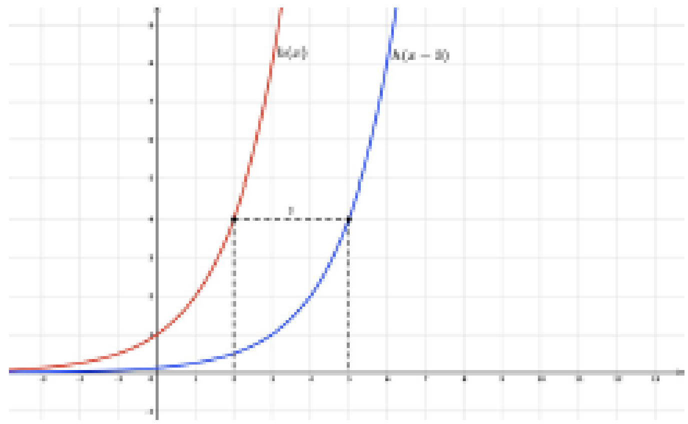
$$h(x-3) = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$$

$$h(x-3) = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

$$h(x-3) = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

$$h(x-3) = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

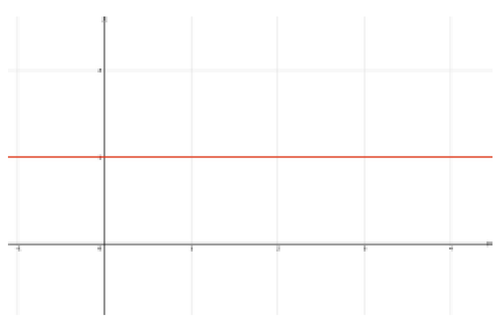
Ahora veamos como queda el movimiento descrito:



Observamos que efectivamente la gráfica se desplaza 3 unidades a la derecha. Por lo tanto, la alternativa es verdadera.

e) Probemos con algunos valores para x y luego veamos el gráfico.

x	y
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1



Observamos que la gráfica es una recta horizontal. Por lo tanto, la alternativa es verdadera.

PREGUNTA 2

Determine el domínio y el recorrido de la función $f(x) = log_2(x+3)$

A) Dominio: $(-3, \infty)$
Recorrido: $\mathbb{R}^+$

B) Dominio: $(-3, \infty)$
Recorrido: $\mathbb{R}$

C) Dominio: $(0, \infty)$
Recorrido: $\mathbb{R}^-$

D) Dominio: $(3, \infty)$
Recorrido: $\mathbb{R}$

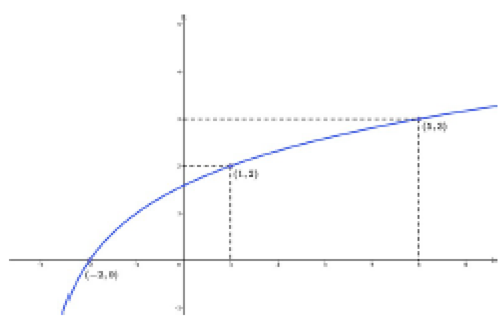
E) Dominio: $(3, \infty)$
Recorrido: $\mathbb{R}^+$

SOLUCIÓN

Una buena estrategia es hacer el gráfico de la función y reconocer mediante el "dibujo.el dominio y recorrido de la función.

Recordar que el dominio de una función corresponde a los valores x que puede tomar la función, mientras que el recorrido corresponde a los valores y a los que llega la función. Dicho esto, podemos hacer una tabla de valores para guiarnos al momento de hacer el gráfico.

x	y
-2	$log_2(-2+3) = log_2(1) = 0$
1	$log_2(1+3) = log_2(4) = 2$
5	$log_2(5+3) = log_2(8) = 3$



Además. debemos recordar que la función logaritmo no acepta valores negativos, por lo que tenemos una restricción en nuestro dominio. Por lo tanto, el dominio corresponde al intervalo $(-3, \infty)$

Mientras que podemos llegar a cualquier valor y, ya que tenemos que la función es creciente y continuam, a pesar de que crece muy lento, por lo que el recorrido será $(-\infty, \infty)$, es decir, todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \log_2(x+3)$$

$$y = \log_2(x+3)$$

$$-4 = \log_2(x+3)$$

$$2^{-4} = x+3$$

$$\frac{1}{2^4} = x+3$$

$$\frac{1}{16} = x+3$$

$$1 = 16(x+3)$$

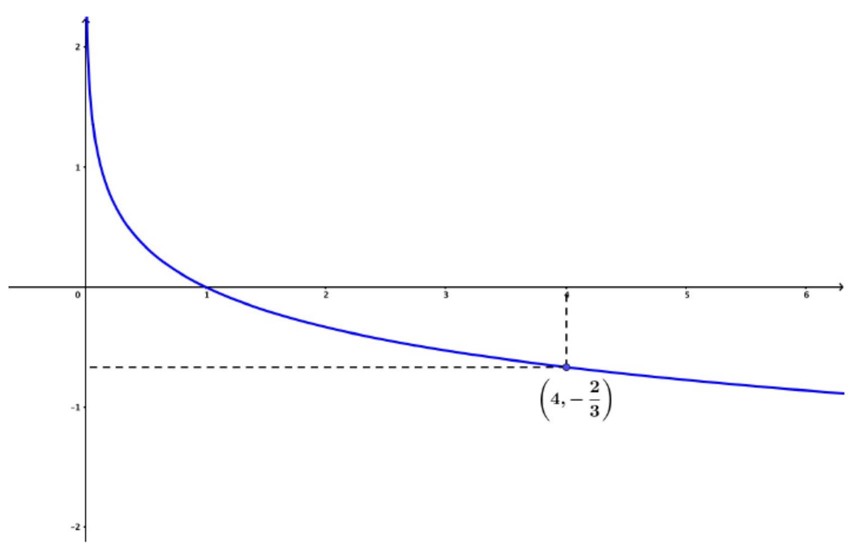
$$1 = 16x + 48$$

$$(1-48)/16 = x$$

$$x = -47/16$$

PREGUNTA 3

En la siguiente imagen, se muestra el gráfico de una función logaritmica $f(x) = log_a x$



Calcule el valor de $f(32)$

A) $\frac{1}{8}$

B) $-\frac{1}{8}$

C) $-\frac{5}{3}$

D) $-\frac{3}{5}$

E) 5

SOLUCIÓN

Para encontrar la función debemos determinar el valor de la base del logaritmo, es decir, el valor de a.

Sabemos dos cosas:

- Primero, la relación entre logaritmo y potencia: $log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
- Segundo, la información proporcionada por el gráfico, y esa es que este pasa por el punto $\left(4, -\frac{2}{3}\right)$. Es decir: f(4) = - $\frac{2}{3} \Rightarrow log_a 4 = -\frac{2}{3}$

Por lo tanto, se tiene que:

$$f(x) = \log_a x$$

$$y = \log_a x$$

$$-\frac{2}{3} = \log_a 4$$

$$a^{-2/3} = 4$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{2/3} = 4$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2/3}\right)^{1/2} = (4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{2/6} = \left(2^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/3}\right)^{3} = (2)^3$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{1} = 8$$

$$\frac{1}{a} = 8$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{8} = a}$$

Con esta información podemos determinar $f(32)$

$$f(32) = \log_{\frac{1}{8}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{8}} 32$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{y} = 32$$

$$(2^{-3})^{y} = 2^{5}$$

$$2^{-3y} = 2^{5}$$

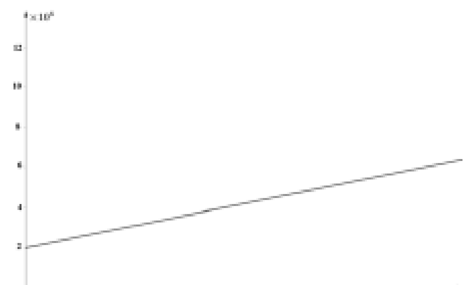
$$-3y = 5$$

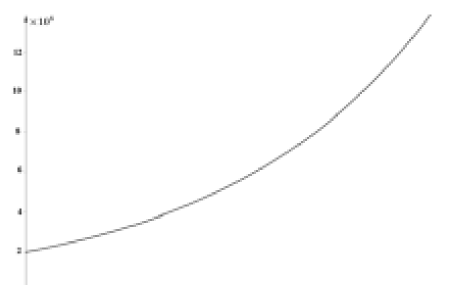
$$\boldsymbol{y = -\frac{5}{3}}$$

PREGUNTA 4

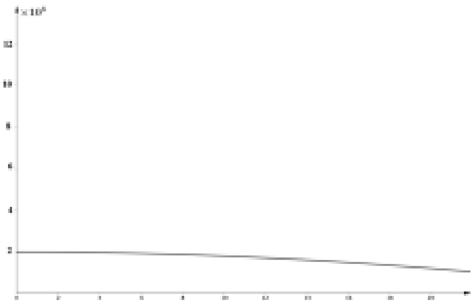
El **interés compuesto** consiste en calcular el **interés** sobre el capital inicial y también el **interés** de los **intereses** acumulados de períodos anteriores de un depósito o préstamo.

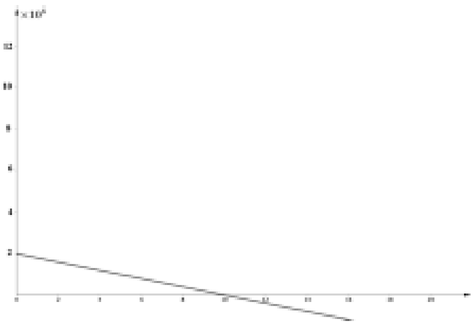
Si se invierten \$2.000.000 a una tasa de interés del 10 % al año, capitalizado continuamente (interés compuesto). ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor el comportamiento del crecimiento del capital?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

SOLUCIÓN

Podemos descartar d) y e), porque buscamos una gráfica que modele el crecimiento del capital y en ambos casos vemos un decrecimiento.

Por otra parte, tenemos que c), parte con un capital menor a 2 millones por lo que tampoco nos sirve.

Mientras que a) es un crecimiento lineal.

Entonces el modelo que mejor explica el comportamiento del capital es la alternativa b).

PREGUNTA 5

En un laboratorio, se estudia determinada bacteria, que tiene la propiedad de triplicarse cada 3 horas. Si comienzan estudiando una población de 2 millones de bacterias, determina la expresión algebraica que representa cuántas bacterias habrá después de 24 horas.

A) 3^{24} millones

B) $2 \cdot 3^{24}$ millones

C) 3^{8} millones

D) $2 \cdot 3^{8}$ millones

E) $3 \cdot 2^{8}$ millones

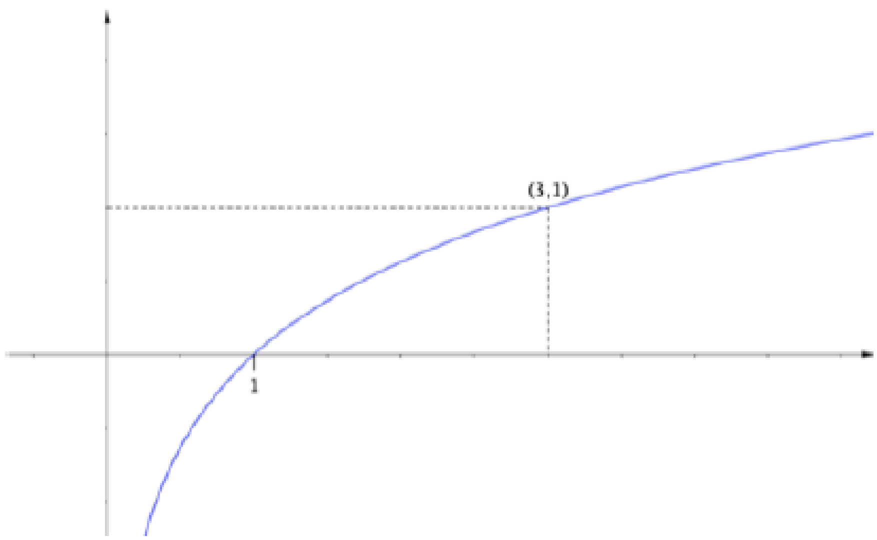
SOLUCIÓN

Notemos que en 24 horas, la población de bacterias se habrá triplicado 8 veces, puesto que $8 \cdot 3 = 24$

N◦ de horas	N◦ de veces triplicado	Total de bacterias
0	0	2 mill.
3	1	$2 \cdot 3$ mill.
6	2	$2 \cdot 3^2$ mill.
9	3	$2 \cdot 3^3$ mill.
...	...	...
24	8	$2 \cdot 3^8$ mill.

PREGUNTA 6

Dada la siguiente grafica determine la expresión de la forma $y = \log_a(x)$ que mejor la representa.



A) $y = \log_{10}(x)$

B) $y = \log_2(x)$

C) $y = \log_e(x)$

D) $y = \log_3(x)$

E) $y = \log_4(x)$

SOLUCIÓN

Notemos que el gráfico pasa por el punto $(3,1)$ por lo tanto tenemos que:

$$1 = \log_a(3)$$

$$\Rightarrow a = 3^1$$

$$\Rightarrow a = 3$$

Entonces la expresión que mejor lo representa es:

$$y = \log_3(x)$$

PREGUNTA 7

El doctor Banner, que ha estado experimentando con la sustancia radioactiva a base de rayos gamma, observa que la masa de la sustancia se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días esta dada por la función:

$$m(t) = 12 \cdot 9^{-0{,}05t}$$

Se sabe que cuando la sustancia alcanza una masa inferior a 4 gramos la sustancia radioactiva deja de ser un peligro. ¿Después de cuantos días será seguro acercarse a la sustancia?

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

SOLUCIÓN

Reemplacemos en la ecuación para encontrar la cantidad de días

$$m(t) = 12 \cdot 9^{-0{,}05t}$$

$$4 = 12 \cdot 9^{-0{,}05t}$$

$$\frac{4}{12} = 9^{-0{,}05t}$$

$$\frac{1}{3} = (3^2)^{-0{,}05t}$$

$$\frac{1}{3} = 3^{-0,1t}$$

$$\frac{1}{3} = 3^{-\frac{1}{10}t}$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{10}t}$$

$$1 = \frac{1}{10}t$$

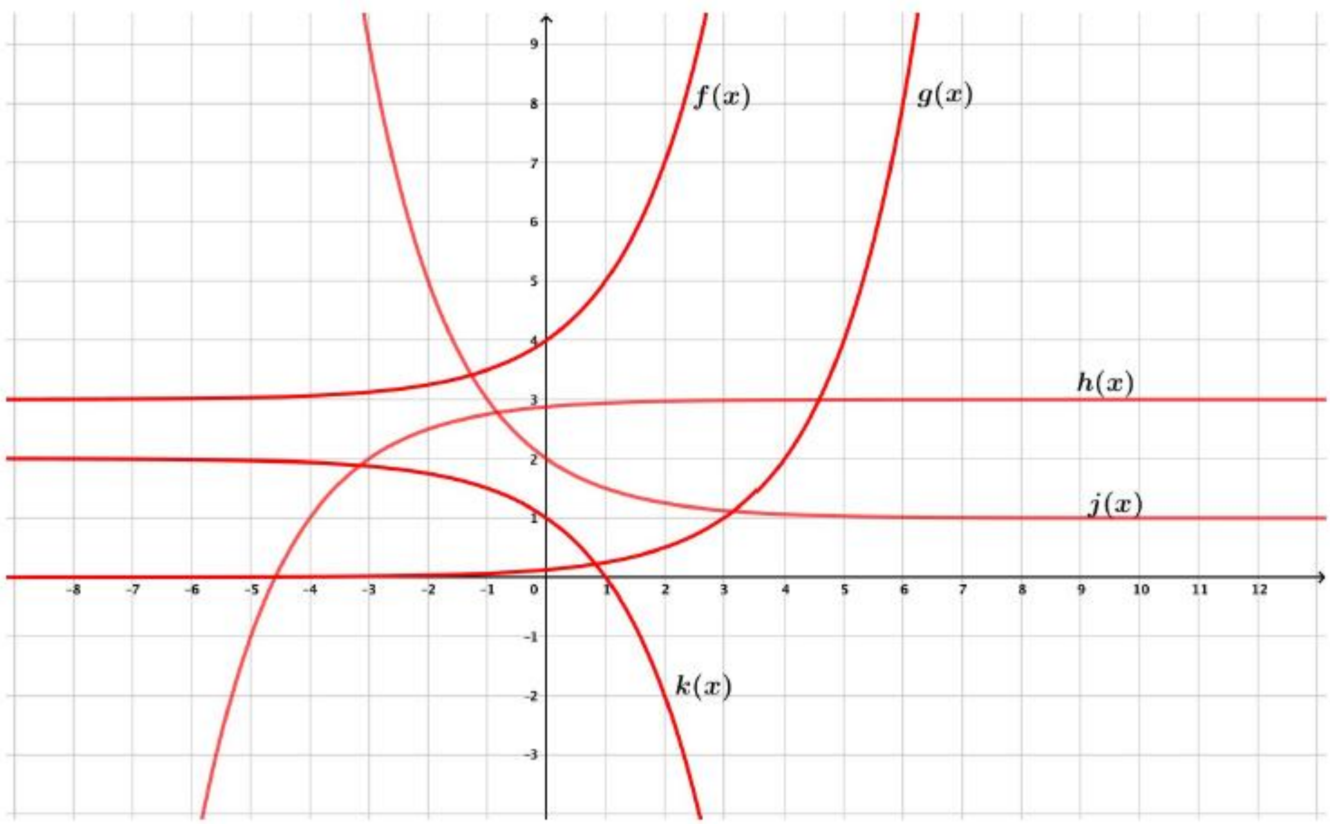
$$1 \cdot 10 = t$$

$$t = 10$$

Sabemos que es seguro cuando la masa es inferior a 4, y es 4 en el día 10, por lo que a contar del día siguiente (11) será seguro.

PREGUNTA 8

El siguiente plano cartesiano se observa la gráfica de 5 funciones distintas, ¿cúal de ellas corresponde la gráfica de $2^x + 3$?



A) $f(x)$

B) $g(x)$

C) $h(x)$

D) $j(x)$

E) $k(x)$

SOLUCIÓN

Podemos descartar inmediatamente $h(x)$, $j(x)$, y $k(x)$ porque la función que buscamos es de forma creciente ya que es una exponencial con base mayor a 1.

Además, tenemos que 2^x+3 debe pasar primero por el punto $(0,4)$ ya que $2^0+3 = 1+3 = 4$ y la única gráfica que pasa por ese punto es $f(x)$

PREGUNTA 9

El área cubierta por una clase de musgo se duplica día a día. Al momento de comenzar la observación del musgo este cubre un área de 0,6 m. ¿Qué área ocupara al cabo de 6 días?

A) 3,6

B) 19,2

C) 36,6

D) 38,4

E) 76,8

SOLUCIÓN

Podemos hacerlo con una tabla, o a partir de la fórmula que modela el crecimiento del musgo:

Día	Metros	Fórmula
0	0,6	$= 0{,}6 \cdot 2^0$
1	1,2	$= 0{,}6 \cdot 2^1$
2	2,4	$= 0{,}6 \cdot 2^2$
3	4,8	$= 0{,}6 \cdot 2^3$
4	9,6	$= 0{,}6 \cdot 2^4$
5	19,2	$= 0{,}6 \cdot 2^5$
6	38,4	$= 0{,}6 \cdot 2^6$
7	76,8	$= 0{,}6 \cdot 2^7$

PREGUNTA 10

Una población de bacterias en condiciones de laboratorio crece cada 30 min en un 5 % el número de ejemplares. Claudia es la encargada de llevar el conteo de bacterias, a las 8 : 00 am hay un conteo inicial de 2.000 individuos. Claudia debe entregar su turno a las 15 : 00, ¿cuántas bacterias entregara aproximadamente?

A) $2 \cdot 1,05^{14}$

B) $2.000 \cdot 10^{14}$

C) $200 \cdot 105^{12}$

D) $2.000 \cdot 1,05^{14}$

E) $2 \cdot 10^{16}$

SOLUCIÓN

Tiempo	t	Expresión	Nºde bacterias
08 : 00	0	2.000	
08 : 30	1	$2.000 \cdot 1,05$	2.100
09 : 00	2	$2.000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 2.000 \cdot 1,05^2$	2.205
09 : 30	3	$2.000 \cdot 1,05^3$	2.315
⋮			
15 : 00	14	$2.000 \cdot 1,05^{14}$	

2000x = 2100

X = 2100/ 2000

X= 1,05

COLEGIO SAN CARLOS DE QUILICURA
MATEMÁTICA/TERCERO MEDIO
J. VELÁSQUEZ/L. CONTRERAS/2020
SESIÓN 2 (45 minutos)

Guía de Trabajo Matemática N° 32

(Del 07 al 11 de diciembre)

Nombre	Curso	Fecha
	IIIº____	**___ / 12/ 2020**

¡Hola! Un gusto saludarte de nuevo, deseando que te encuentres muy bien junto a tus familiares y seres queridos.

Esta guía tiene como finalidad, invitarte a nuestra próxima clase online donde se realizará un reforzamiento general de los contenidos tratados en los objetivos de aprendizaje priorizados este año por el Ministerio de Educación.

Luego de esta clase de reforzamiento, deberás realizar una **PRUEBA RECUPERATIVA** que te permitirá **suplir una calificación insuficiente o pendiente** que tengas en el ramo. Dichas pruebas recuperativas, serán publicadas en el classroom el jueves 10 de diciembre a las 18:00 horas y estarán disponibles hasta el domingo 13 de diciembre hasta las 23:59 horas.

- **LA PRUEBA RECUPERATIVA N° 1**, estará relacionada con el Objetivo de Aprendizaje N° 2, donde trabajamos medidas de dispersión y probabilidad.
- **LA PRUEBA RECUPERATIVA N° 2**, estará relacionada con el Objetivo de Aprendizaje N° 3, donde trabajamos función exponencial y logarítmica.

LOS ALUMNOS QUE SERÁN CITADOS PARA ESTA CLASE DE REFORZAMIENTO, RECIBIRÁN EN EL TRANSCURSO DE LA SEMANA LA INVITACIÓN EN SU CORREO ELECTRÓNICO INSTITUCIONAL.

ES IMPORTANTE QUE ASISTAS A LA CLASE Y QUE CUMPLAS CON LAS PLAZOS ESTABLECIDOS PARA LAS PRUEBAS, PUESTO QUE NO HABRÁ UN SEGUNDO PLAZO, RECUERDA QUE YA ESTAMOS EN LA ETAPA FINAL DEL AÑO ESCOLAR.

DE TENER ALGÚN PROBLEMA, POR FAVOR COMUNICARSE POR CORREO ELECTRÓNICO CON SU PROFESORA CORRESPONDIENTE.

¡ÁNIMO Y MUCHOS ÉXITOS!

NUESTRA CLASE DE REFORZAMIENTO SE EFECTUARÁ EL PRÓXIMO JUEVES 10 DE DICIEMBRE PARA III° A, III° B Y III° C A LAS 17:00 HORAS, A TRAVÉS DE LA PLATAFORMA GOOGLE MEET, ASI QUE DEBES BUSCAR EL LINK PARA UNIRTE A LA CLASE EN TU