Guía n°10 de Matemáticas

(Del 8 al 12 de junio)

Nombre	Curso	Fecha
	IVº	/ 06 / 2020

Los contenidos de esta actividad estarán en la prueba de admisión transitoria:
Eje temático: ÁLGEBRA
Contenido 1: Sistemas de ecuaciones.
Descripción de contenidos: resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por método gráfico y método algebraico.
Contenido 2: Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Su representación sagital y en forma algebraica.

Estimada(o) estudiante:
La guía n°10 consta de dos partes. La primera consiste en que revises el solucionario de la guía anterior y posteriormente observes el video sobre la ecuación de la recta y sistemas de ecuaciones. La segunda parte tiene como objetivo conocer las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Estos contenidos entrarán en la próxima prueba de transición universitaria (ex PSU) los cuales se irán relacionando con los contenidos de IV° medio.

PARTE I: Solucionario de actividad (guía n° 9)

Después de observar el video sobre ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones resuelve las siguientes actividades: **Contenido: ECUACIONES LINEALES. (actividad 1)**

1. Representa cada ecuación lineal con dos incógnitas en la forma $y = mx + n$.

a. $3x + y = 5$ **c.** $-4x - 2y = 6$

b. $-2x - y = 7$ **d.** $-3x - 9y = 0$

En este caso , lo que debemos hacer es expresar cada ecuación en su forma principal, es decir, despejando el valor de " y"

$$a)\quad \begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ y &= -3x + 5 \end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned} -2x - y &= 7 \\ -2x - 7 &= y \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} -4x - 2y &= 6 \\ -2y &= 4x + 6 \quad /\cdot -1 \\ 2y &= -4x - 6 \quad /:2 \\ y &= -\frac{4}{2}x - \frac{6}{2} \\ y &= -2x - 3 \end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} -3x - 9y &= 0 \\ -9y &= 3x \quad /:-9 \\ y &= -\frac{3}{9}x \\ y &= -\frac{1}{3}x \end{aligned}$$

2. Completa cada tabla según corresponda.

a. $4x - 5y = 6$

x	y	(x, y)
–2		
	–1	
	0	
1		
	3	
4,2		

x	y	(x, y)
–2	-2,8	(-2 , -2,8)
0,25	–1	(0,25 , -1)
1,5	0	(1,5 , 0)
1	- 0,4	(1 , -0,4)
5,25	3	(5,25 , 3)
4,2	2,16	(4,2 , 2,16)

En este caso, también hay que expresar la ecuación de la forma y = mx + n .

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 6 \\ -5y &= -4x + 6 \quad /\cdot -1 \\ 5y &= 4x - 6 \\ y &= \frac{4x - 6}{5} \\ y &= \frac{4}{5}x - \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, si x =2, queda:

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\cdot -2-\frac{6}{5}=-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}=\frac{-8-6}{5}=-\frac{14}{5}=-2{,}8$$

Por tanto, si x = 1, queda $$y=\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}-\frac{6}{5}=\frac{4-6}{5}=-\frac{2}{5}=-0{,}4$$

Por tanto, si x = 4,2 , queda $$y=\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\cdot 4{,}2-\frac{6}{5}=\frac{16{,}8}{5}-\frac{6}{5}=\frac{16{,}8-6}{5}=\frac{10{,}8}{5}=2{,}16$$

Ahora cuando y = -1, despejamos el valor de x

$$\begin{aligned}4x-5y&=6\\4x&=5y+6\\x&=\frac{5y+6}{4}\\x&=\frac{5}{4}y+\frac{6}{4}\end{aligned}$$

$$x=\frac{5}{4}y+\frac{6}{4}=\frac{5}{4}\cdot -1+\frac{6}{4}=-\frac{5}{4}+\frac{6}{4}=\frac{-5+6}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Ahora cuando y = 0, queda: $$x=\frac{5}{4}y+\frac{6}{4}=\frac{5}{4}\cdot 0+\frac{6}{4}=0+\frac{6}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5$$

Ahora cuando y = 3, queda: $$x=\frac{5}{4}y+\frac{6}{4}=\frac{5}{4}\cdot 3+\frac{6}{4}=\frac{15}{4}+\frac{6}{4}=\frac{15+6}{4}=\frac{21}{4}=5{,}25$$

Contenido: SISTEMAS DE ECUACIONES. (actividad 2)

1. Representa gráficamente cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases}7x+4y=1\\x+2y=5\end{cases}$

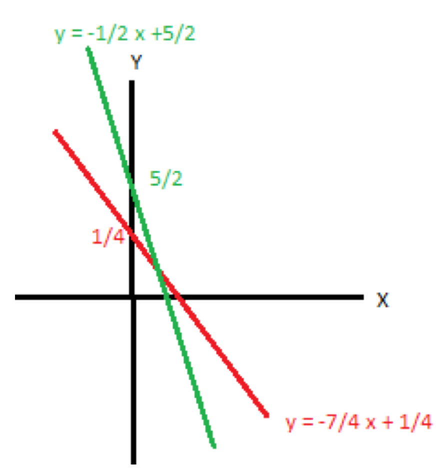
Para representar la gráfica de dos rectas en el plano hay que dejar cada ecuación en su forma principal, es decir de la forma y = mx +n

1) $7x+4y=1$ 2) $x+2y=5$

$$4y=-7x+1 \qquad 2y=-x+5$$

$$y=\frac{-7x+1}{4} \qquad y=\frac{-x+5}{2}$$

$$y=-\frac{7}{4}x+\frac{1}{4} \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$



b) $\left.\begin{array}{l} 2x+3=4y \\ x+2y=5y \end{array}\right|$

Para representar la gráfica de dos rectas en el plano hay que dejar cada ecuación en su forma principal, es decir de la forma y = mx +n

1) $2x+3=4y$

$4y=2x+3$

$y=\dfrac{2x+3}{4}$

$y=\dfrac{2}{4}x+\dfrac{3}{4}$

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$

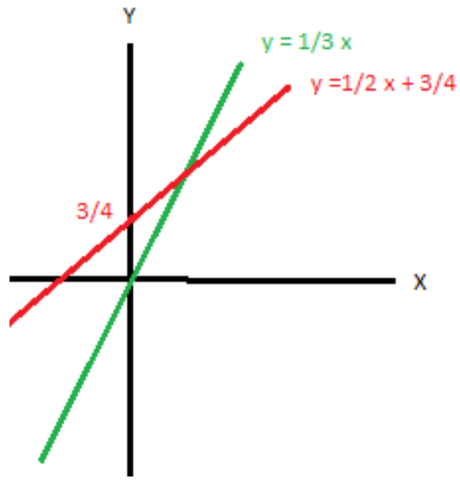
2) $x+2y=5y$

$2y-5y=-x$

$-3y=-x \quad /\cdot -1$

$3y=x$

$y=\dfrac{1}{3}x$



2. Resuelve de manera gráfica cada sistema de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=1 \\ 2x+3y=-1 \end{array}\right|$

1) $3x+2y=1$

$2y=-3x+1$

$y=\dfrac{-3x+1}{2}$

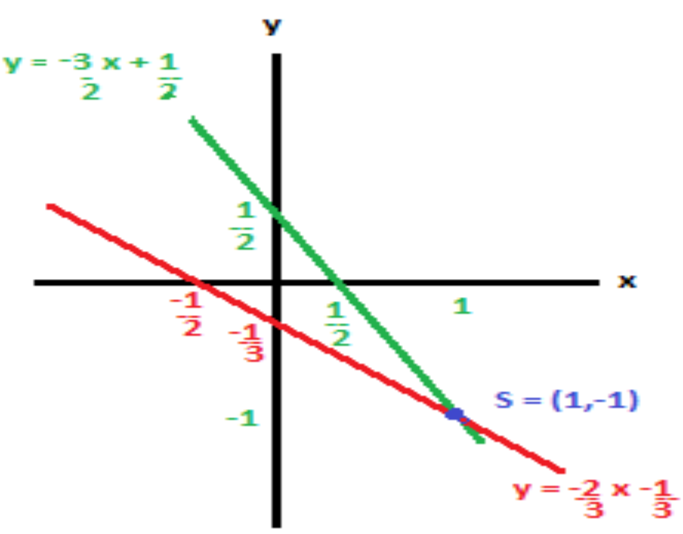
$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

2) $2x+3y=-1$

$3y=-2x-1$

$y=\dfrac{-2x-1}{3}$

$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$



Ahora haremos una tabla de valores para cada ecuación, nos daremos valores x = 0 y x = 1 y reemplazaremos en cada función:

$para \quad y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

x	y
0	1/2
1	-1

$para \quad y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$

x	y
0	-1/3
1	-1

Por lo tanto, el conjunto solución es S = (1, -1)

b) $\begin{cases} x = -2y \\ 0 = y - x \end{cases}$

1) $x = -2y$

$-2y = x$

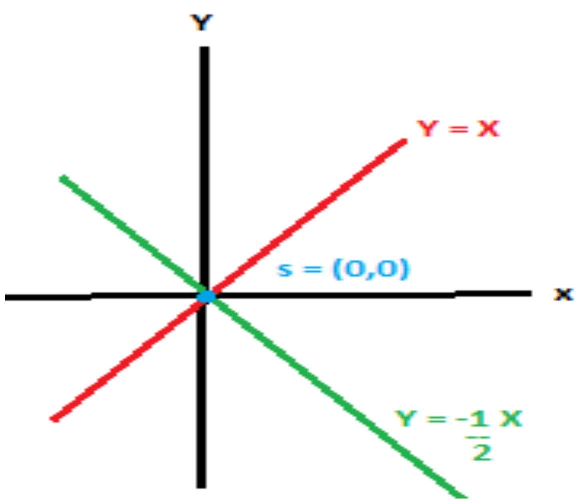
$y = \dfrac{1}{-2}x$

$y = -\dfrac{1}{2}x$

2) $0 = y - x$

$y - x = 0$

$y = x$



Ahora haremos una tabla de valores para cada ecuación, nos daremos valores x = 0 y x = 1 y reemplazaremos en cada función:

$para \quad y = -\dfrac{1}{2}x$

x	y
0	0
1	-1/2

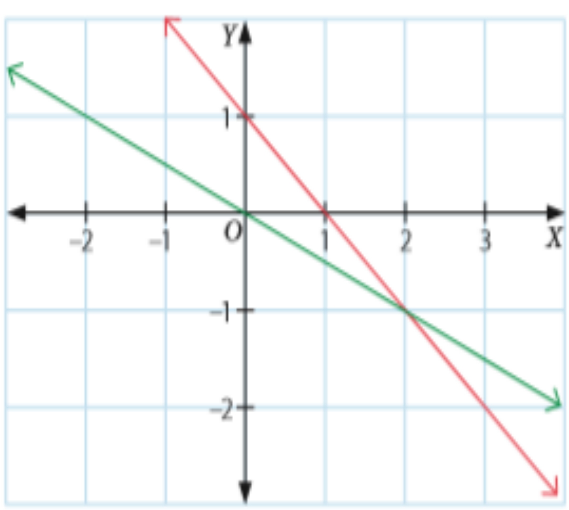
$para \quad y = x$

x	y
0	0
1	1

Por lo tanto el conjunto solución S = (0,0)

3. Escribe el sistema de ecuaciones que se representó en cada caso.

a)



Luego el sistema de ecuaciones encontrado de acuerdo a estas dos rectas es:

$L_1: \quad y = -\dfrac{1}{2}x$

$y = -\dfrac{1}{2}x \quad /\cdot 2$

$2y = -x$

$x + 2y = 0 \quad (*)$

$L_2: \quad y = -x - 1$

$x + y = -1 \quad (**)$

$luego \quad el \quad sistema \quad es:$

$L_1: \quad x + 2y = 0$

$L_2: \quad x + y = -1$

El conjunto solución de este sistema está en el punto S= (2, -1), ya que en éste punto se intersectan ambas rectas.

Existen dos rectas, la recta L_1 como función lineal y la otra recta L_2 como función afín:

Función lineal (recta verde) L_1: y = mx

Observo dos puntos de la recta, el punto (-2, 1) y el punto (2,-1), entonces obtengo la pendiente con la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2--2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

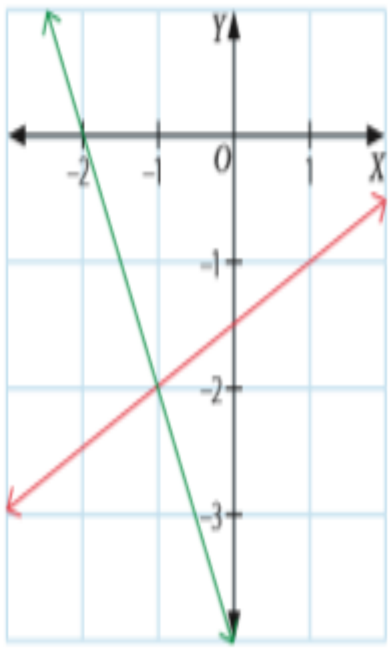
$$luego \quad la \quad recta \quad L_1 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$$

Para la función afín (recta rosa) L_2: y = mx + n , al observar la gráfica obtengo n en el punto (0,y) , que en este caso es n =1 , luego observo dos puntos de la recta , el punto (0,1) y el punto (2, -1) entonces obtengo la pendiente con la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$luego \quad la \quad recta \quad L_2 \quad \rightarrow y = -1x + 1$$

b)



El conjunto solución de este sistema está en el punto S= (-1,-2), ya que es el punto de intersección de ambas rectas.
Las dos rectas L_1 y L_2 son funciones afines:
Función afín (recta verde) L_1 : y = mx + n , se observan dos puntos de ella, el punto (-2, 0) y el punto (-1,-2) y con estos datos obtenemos la pendiente de la recta con la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{-1--2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\therefore \quad y = -2x + n$$

El valor de n lo encontramos siempre en el punto (0, y) de la función, sin embargo, no conocemos este valor ya que no está descrito claramente en la gráfica, entonces debemos tomar en cuenta el par ordenado del conjunto solución, es decir, el punto (-1,-2) donde $L_1 = L_2$. Por lo tanto:

$$y = -2x + n \quad reemplazando \quad el \quad punto \quad (-1,-2) \quad queda:$$

$$-2 = -2 \cdot -1 + n$$

$$-2 = 2 + n$$

$$-2 - 2 = n$$

$$-4 = n$$

$$luego \quad la \quad recta \quad L_1 \rightarrow y = -2x - 4$$

Luego, para la función afín (recta rosa) L_2 : y = mx + n., se observan dos puntos de ella , el punto (-1,-2) y el punto (1, -1) y con estos datos obtenemos la pendiente de la recta con la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1--2}{1--1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x + n$$

Pero no sabemos el valor de n y tomando en cuenta el valor del conjunto solución, es decir, en el punto (-1,-2) donde $L_1 = L_2$. Tenemos que:

$$y = \frac{1}{2}x + n \quad reemplazando \quad el \quad punto \quad (-1,-2) \quad queda:$$

$$-2 = \frac{1}{2}x \cdot -1 + n$$

$$-2 = -\frac{1}{2} + n$$

$$-2 + \frac{1}{2} = n$$

$$\frac{-4+1}{2} = n$$

$$-\frac{3}{2} = n$$

$$luego \quad la \quad recta \quad L_2 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Luego el sistema de ecuaciones encontrado de acuerdo a estas dos rectas es:

$$L_1: \quad y = -2x - 4$$

$$2x + y = -4 \quad (*)$$

$$L_2: \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2y = x - 3$$

$$-x + 2y = -3 \quad (**)$$

Luego el sistema de ecuaciones que corresponde a la gráfica es:

$$L_1: \quad 2x + y = -4 \quad (*)$$

$$L_2: \quad -x + 2y = -3 \quad (**)$$

4. **Determina la restricción sobre k para que cada sistema de ecuaciones sea compatible.**

a) $\begin{aligned} kx + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$

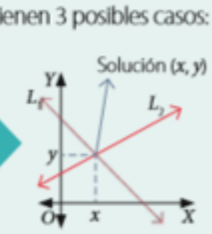
$$\frac{k}{1} \neq \frac{4}{2} \rightarrow k \neq 2$$

Al graficar el sistema de ecuaciones: $\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$

Con a, b, c, d, e y f números racionales distintos de cero, se tienen 3 posibles casos:

Caso 1. El sistema es **compatible**, es decir, tiene **una única solución** y es cuando las dos rectas son secantes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$



b) $\left.\begin{array}{l}4x+2y=-7\\3x+ky=12\end{array}\right|$

$$\frac{4}{3}\neq\frac{2}{k}\rightarrow 4\cdot k\neq 2\cdot 3\rightarrow 4k\neq 6\rightarrow k\neq\frac{6}{4}\ simplificando\quad queda:\quad k\neq\frac{3}{2}$$

5. Resuelve cada sistema de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente.

a) $\left.\begin{array}{l}5x-4y=-2\\-2x+2y=5\end{array}\right|\begin{array}{l}\cdot 1\\\cdot 2\end{array}$

$$\begin{array}{r}5x-4y=-2\\-4x+4y=10\\\hline x=8\end{array}\ +$$

ahora reemplacemos el valor de x =8 en la ecuación -2 x + 2 y = 5

$-2 * 8 + 2y = 5$

$-16 + 2y = 5$

$2y = 5 + 16$

$2y = 21$

$y = \frac{21}{2}$

El conjunto solución de este sistema es $S=\left(8.\frac{21}{2}\right)$

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}(x+3)=4y\\3x+2y=5(y+1)\end{array}\right|\ *4$

$\left.\begin{array}{l}x+3=16y\\3x+2y=5y+5\end{array}\right|$ reordenando el sistema, queda:

$\left.\begin{array}{l}x-16y=-3\\3x-3y=5\end{array}\right|\ *-3$

$$\begin{array}{r}-3x+48y=9\\3x-3y=5\\\hline 45y=14\end{array}\ +$$

$y = 14/45$

ahora reemplazando y = 14 /45, en la ecuación

$x + 3 = 16y$

$x + 3 = 16 * \frac{14}{45}$

$x + 3 = \frac{224}{45}\quad / -3$

$x = \frac{89}{45}$

El conjunto solución de este sistema es $S=\left(\frac{89}{45}.\frac{14}{45}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l}2(x+4y)=-1\\-5x+3y=5\end{array}\right|$ $\quad\left.\begin{array}{l}2x+8y=-1\\-5x+3y=5\end{array}\right|\begin{array}{l}*5\\*2\end{array}$

$$\begin{array}{r}10x+40y=-5\\-10x+6y=10\\\hline 46y=5\end{array}\ +$$

$y = \frac{5}{46}$

ahora vamos a reemplzar el valor de $y=\frac{5}{46}$ en la ecuación $2x + 8y = -1$

$2x + 8 * \frac{5}{46} = -1$

$2x + \frac{40}{46} = -1\quad / *46$

$92x + 40 = -46$

$92x = -86$

$x = \frac{-86}{92} = \frac{-43}{46}$

El conjunto solución de este sistema es $S=\left(-\frac{43}{46},\frac{5}{46}\right)$

La explicación de la resolución de estos ejercicios resueltos están en el siguiente video con el link https://www.youtube.com/watch?v=FNKBS-TA4Ok&feature=youtu.be

Parte II.- Ahora te invito a ver el video referido a Funciones: Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas.

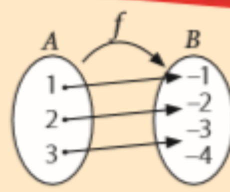
Leer las páginas desde la 92 hasta la 95. Y posteriormente desarrolla las actividades anexas:

Tomo nota

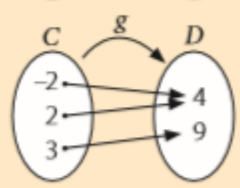
- Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A (**dominio**) un único elemento de otro conjunto B (**codominio**).
- El **recorrido** de una función es un subconjunto del codominio y sus elementos son todos los valores que toma la variable dependiente y.
- Cada elemento del recorrido es **imagen** de, al menos, un elemento del dominio. A su vez, cada elemento del dominio es **preimagen** de un único elemento del recorrido. Por ejemplo, si f es una función y se cumple que $f(1) = 6$, entonces 6 es imagen de 1 y 1 es preimagen de 6.

Tomo nota

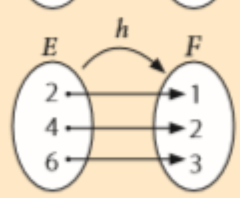
- Una función es **inyectiva** si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Por ejemplo, la función $f: A \longrightarrow B$ representada en el diagrama sagital es inyectiva ya que todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes.



- Una función es **sobreyectiva** si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Por ejemplo, la función $g: C \longrightarrow D$ representada en el diagrama sagital es sobreyectiva ya que todo elemento del codominio D tiene al menos una preimagen.



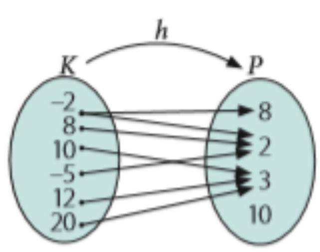
- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen. Por ejemplo, en la función $h: E \longrightarrow F$ representada en el diagrama sagital, a cada elemento de codominio F le corresponde una única preimagen.



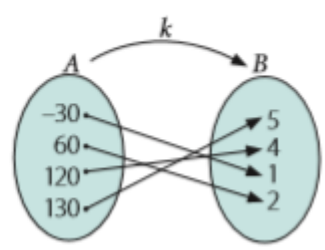
Actividades

1. **Analiza los siguientes diagramas sagitales y determina aquellos que representen una función.**

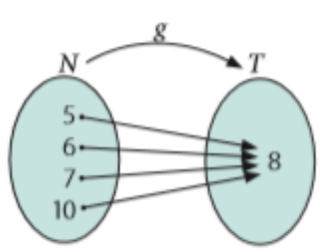
a.



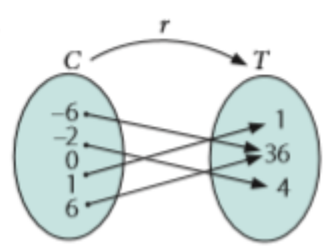
c.



b.



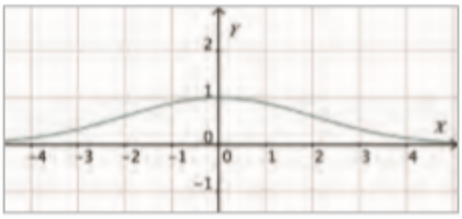
d.



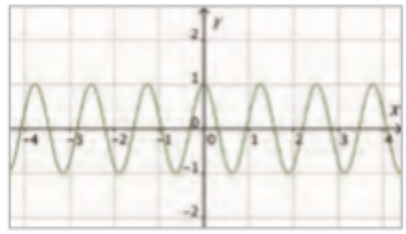
2. **En tu cuaderno construye un diagrama sagital que represente una función y otro que no lo sea.**

3. Estima el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a.



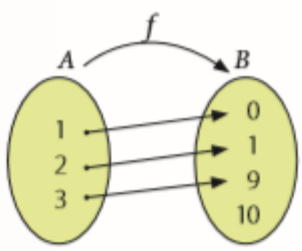
b.



4. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{3}{x}$ **b.** $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$ **c.** $h(x) = log(x-8)$ **d.** $k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

5. El siguiente diagrama sagital representa la función *f*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



I. f es inyectiva.

II. f es sobreyectiva.

III. $rec\, f = \{0, 1, 9, 10\}$

A. Solo I

B. Solo II

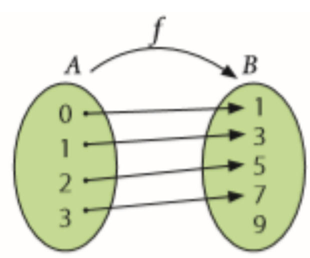
C. Solo III

D. Solo I y III

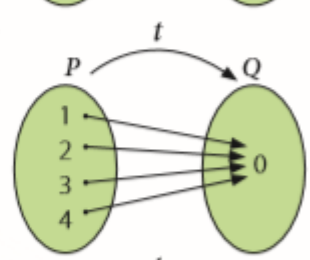
E. Solo II y III

6. Observa los siguientes diagramas sagitales e indica si las funciones que representan son inyectivas o sobreyectivas. Determina, además, aquellas que son biyectivas. Justifica tu respuesta, en cada caso.

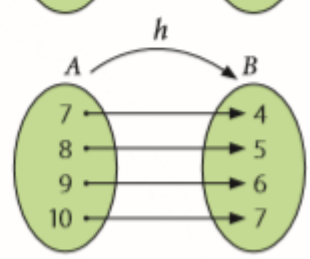
a.



b.



c.



d.