Colegio San Carlos de Quilicura
Matemática/Cuarto Medio
LCG/CSV/2020

Guía n°12 de Matemáticas

(Del 22 al 26 de junio)

Nombre	Curso	Fecha
	IVº	/ 06 / 2020

Los contenidos de esta actividad estarán en la prueba de admisión transitoria:
Eje temático: ÁLGEBRA
Contenido: Composición de funciones y Función Inversa.

Estimada(o) estudiante:
La guía n°12 consta de dos partes. La primera consiste en que realices las actividades correspondientes a composición de funciones y función inversa.
La segunda parte tiene como objetivo que realices una actividad on line en puntajenacional.cl .
Estos contenidos entrarán en la próxima prueba de transición universitaria (ex PSU) los cuales se irán relacionando con los contenidos de IV° medio.

PARTE I: Contenidos: composición de funciones y función inversa.
Composición de funciones:

Dadas dos funciones f y g , se define como la composición de la función f con la función g , a la función denotada f o g (léase f compuesta con g), cuya regla de correspondencia es fog (x)= f [g (x)]

Para obtener la regla de correspondencia de la función f o g , según la definición anterior, basta con sustituir la función g en la variable independiente “x” de la función f .

Ej: si $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \sqrt{x+2}$, obtenga: $fog(x)$, $gof(x)$, $hof(x)$ y $fof(x)$:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 3$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x-3) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$hof(x) = h(f(x)) = h(x-3) = \sqrt{(x-3)+2} = \sqrt{x-1}$$

$$fof(x) = f(f(x)) = f(x-3) = (x-3) - 3 = x - 6$$

Actividad 1: Sea $f(x) = \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = 2 - x$, obtenga: $fog(x)$, $gof(x)$ y $fof(x)$

Función inversa: Leer las paginas 98-99-100 del texto.

Las condiciones para que exista una función inversa son las siguientes:

Tomo nota

- Dada una función $f: A \longrightarrow B$ biyectiva, llamamos función inversa de f a la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que para cualquier a del dominio y b del recorrido de f se cumple que: Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.
- Dada una función f y su función inversa f^{-1}, se cumplen: $dom\, f = rec\, f^{-1}$ y $rec\, f = dom\, f^{-1}$.
- Dada una función f y su función inversa f^{-1}, se cumple que: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.
- Dada una función $f(x)$, para determinar la representación algebraica de $f^{-1}(x)$, su función inversa, se escribe la ecuación $(f \circ f^{-1})(x) = x$, aplicando $f(x)$ a la expresión $f^{-1}(x)$, y luego se resuelve la ecuación, considerando a $f^{-1}(x)$ como la incógnita.

¿Qué es una función inversa?

Una función inversa está representada por $f^{-1}(x)$ es aquella que cumple la condición:

$$f(a) = b \quad \rightarrow f^{-1}(b) = a$$

Es decir, que si en una función para x = a, el valor de ella es "b" , entonces en la función inversa para x = b el valor de ella es "a".

¿Cómo calcular la función inversa?

Los pasos para calcular función inversa son los siguientes:

1.- A f(x) le llamamos " y"

2.- Despejamos "x"

3.- Intercambiamos la "x" por la "y"

4.- A "y" le llamamos $f^{1}(x)$

Por ejemplo, tenemos la siguiente función afín dada por la expresión $f(x) = 3x + 12$ Encuentre $f^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 12 \\ y &= 3x + 12 \\ y - 12 &= 3x \\ \frac{y-12}{3} &= x \\ \frac{x-12}{3} &= y \\ \frac{x-12}{3} &= f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Ahora comprobemos la condición $f(a) = b \quad \rightarrow f^{-1}(b) = a$

Para esto nos daremos un valor de "x" y los reemplazaremos en la función f :

Calculemos, para x = 2 y reemplazo en f (x), queda:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 12 \\ f(2) &= 3 \cdot 2 + 12 \\ f(2) &= 6 + 12 \\ f(2) &= 18 \end{aligned}$$

Ahora para comprobar, calculemos el valor de la función inversa $f^{-1}(x)$ cuando x = 18, quedando:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-12}{3}$$

$$f^{-1}(18) = \frac{18-12}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Por lo tanto, queda comprobada la condición $f(2) = 18 \quad \rightarrow f^{-1}(18) = 2$

¿Todas las funciones tienen inversa?

No todas las funciones tienen inversa. Solo las funciones que son biyectivas , es decir, que son inyectivas y sobreyectivas a la vez. Recordemos que para saber gráficamente si una función es inyectiva o no, debemos trazar una o más rectas paralelas al eje "x", si esta(s) recta(s) intersecta(n) en un solo punto a la gráfica entonces es inyectiva y, para comprobar si una función es sobreyectiva debemos verificar que el recorrido o rango corresponda a todo el codominio, por lo tanto, esta función tendrá su inversa.

Ejemplos de obtenciones de funciones inversas de distintos tipos:

Encuentra la función inversa $f^{-1}(x)$ de la función afín $f(x)=x+3$ definida $f: IR \rightarrow IR$

Lo primero que debemos hacer es comprobar si es una función inyectiva :

Para analizar algebraicamente si una función es inyectiva se debe cumplir que $f(x_1)=f(x_2)$

O sea: $f(x)=x+3$ comprobando que

$$\begin{aligned} f(x_1)&=f(x_2) \\ x_1+3&=x_2+3 \qquad /-3 \\ x_1&=x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si es inyectiva, ahora comprobemos que es sobreyectiva, para esto debemos despejar la variable "y" en la función original, con el objetivo de encontrar el recorrido o rango y verificar si el recorrido corresponde al dominio de la función inversa:

$$\begin{aligned} f(x)&=x+3 \\ y&=x+3 \\ y-3&=x \\ x-3&=f^{-1}(x) \end{aligned} \qquad \therefore \ el \quad rec\ f = dom\ f^{-1}$$

Ahora comprobemos que $fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x$

$$fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=f(x-3)=x-3+3=x$$

Por lo tanto, queda comprobado que $dom\ f = rec\ f^{-1}$ y $dom\ f = rec\ f^{-1}$

Luego la función inversa de $f(x)=x+3$ es $f^{-1}(x)=x-3$

Función inversa de una función racional: sea la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{3-x}$, encuentra $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{2x-1}{3-x} \\ y&=\frac{2x-1}{3-x} \\ y(3-x)&=2x-1 \\ 3y-xy&=2x-1 \\ 3y+1&=2x+xy \\ 3y+1&=x(2+y) \\ \frac{3y+1}{2+y}&=x \\ \frac{3x+1}{2+x}&=y \qquad o \quad bien \quad f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2+x} \end{aligned}$$

La función f está definida para: dom f = IR- {3} y el rec f = IR – {-2}. (para encontrar el recorrido o el rango de la función siempre debemos encontrar la función inversa.) Ahora definamos el dominio y recorrido de la función inversa: dom $f^{-1}(x)$=IR – {-2} y el rec $f^{-1}(x)$ = IR –{3}

Función inversa de una función irracional: sea la función $f(x) = \sqrt{x-3}$, encuentra $f^{-1}(x)$

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$
$$y = \sqrt{x-3} \qquad /(\ )^2$$
$$y^2 = x-3$$
$$y^2 + 3 = x$$
$$x^2 + 3 = y$$
$$x^2 + 3 = f^{-1}(x)$$

La función f está definida para:
dom f = [3, +oo[y el rec f = IR . (para encontrar el recorrido de la función siempre debemos encontrar la función inversa.)
pero al definir el recorrido nos damos cuenta que corresponde a una función cuadrática la cual no es inyectiva por que tiene dos imágenes. Por lo tanto, no tiene función inversa.

Cada vez que una función irracional tenga índice par, entonces no tendrá función inversa.

Ahora veamos otra función radical o irracional $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, encuentra $f^{-1}(x)$

$$f(x) = \sqrt[3]{x+2}$$
$$y = \sqrt[3]{x+2} \qquad /(\ )^3$$
$$y^3 = x+2$$
$$y^3 - 2 = x$$
$$x^3 - 2 = y$$
$$x^3 - 2 = f^{-1}(x)$$

La función f está definida para:
dom f = [-2, +oo[y el rec f = IR . (para encontrar el recorrido de la función siempre debemos encontrar la función inversa.)
pero al definir el recorrido nos damos cuenta que corresponde a una función cúbica la cual, si es inyectiva por que tiene solo una imagen, entonces si tiene función inversa.

Dom $f^{-1}(x)$= IR y rec $f^{-1}(x)$= [-2, +oo [

Cada vez que una función irracional tenga índice impar, entonces tendrá función inversa.

Función inversa de una función cuadrática: sea la función $f(x) = x^2$ encuentra $f^{-1}(x)$

$$f(x) = x^2$$
$$y = x^2 \quad /\sqrt{\ }$$
$$+-\sqrt{y} = x$$
$$+-\sqrt{x} = y$$
$$+-\sqrt{x} = f^{-1}(x)$$

Esto no es una función. En este caso, no existe función inversa porque cada elemento tiene dos imágenes y una función puede tener a lo sumo una imagen.

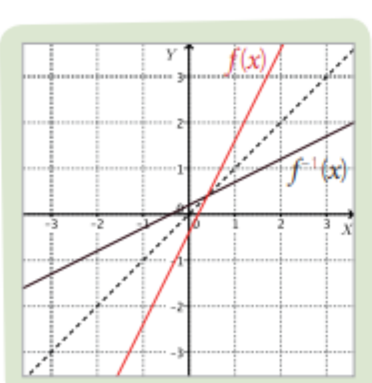
¿Cómo hacerlo?

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1}.

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f\ (f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$.



$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$ .... Restamos $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5}$ .... Multiplicamos por 2.

$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$

Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ahora con la teoría vista, debes desarrollar la **actividad 2:**

Si $k(x) = 3x^3 - 4$, entonces $k^{-1}(20)$ es:

A. 1
B. 2
C. 4
D. 6
E. 8

¿Cuál es la función inversa de $f(x) = x^3 + 1$?

A. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
B. $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$
C. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
D. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
E. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 3x + 1$?

A. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{1}$
B. $f^{-1}(x) = x - 3$
C. $f^{-1}(x) = -3x - 1$
D. $f^{-1}(x) = x + 3$
E. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

Si $f(x) = x^5 + 8$, entonces $f^{-1}(40)$ es:

A. 2
B. 4
C. 8
D. 18
E. 32

Parte II: tiene como objetivo conocer a grandes rasgos cuánto has aprendido de los contenidos vistos en las últimas tres guías anteriores y corresponde a una evaluación formativa la cual debes desarrollar on line ingresando con tu registro previo a la plataforma puntajenacional.cl y hacerla en el tiempo estimado.

INSTRUCCIONES:

• La evaluación es individual
• Recuerda que esta evaluación es muy importante para que logres identificar cuanto has avanzado en tus aprendizajes. Por tanto, ten una actitud de responsabilidad al momento de desarrollar la evaluación.
• Lee atentamente cada una de las preguntas y contesta marcando la alternativa que corresponda.
• Toda pregunta que requiera desarrollo matemático tienes que hacerlo en tu cuaderno, también puedes hacer uso de las guías anteriores como apoyo teórico y práctico.
• esta evaluación formativa consta de **siete preguntas de selección única y con un tiempo de duración de 30 minutos.**
• Al finalizar la evaluación debes marcar la opción Finalizar y enviar la evaluación. La docente llevara el registro personal de cada una de las instancias evaluativas desarrolladas en el trabajo ON LINE.
• El Test se encontrará disponible desde el **día lunes 22 de junio desde las 08:00hrs hasta el día domingo 28 de junio a las 23:00**
• Los resultados se encontrarán disponibles desde el lunes 29 de junio a las 8:00 hrs.
• Recuerda que puedes realizar tus consultas a tus respectivas profesoras en los correos: profeloreto.scq@gmail.com en el siguiente horario **miércoles y jueves** desde las **11: 00** a **12:00 hrs** profesoracarolsv@gmail.com en el siguiente horario: **martes** y **jueves** desde: las **16:00** hasta las **17:00 hrs**

Orientaciones para EVALUACION ON LINE:
Ingresa a la página web:
www.puntajenacional.cl
Curso IV° MEDIO → MATEMATICA
Evaluación ensayo: evaluación formativa n°4 (funciones y sistemas de ecuaciones)
N° instrumento # 1874968
Evaluación ID # 1787359 **Tiempo estimado: (30 Minutos)**

Estimados estudiantes: además adjuntaremos ppt. Trabajado en la clase on line n°2.