



Matemática
 Terceros Medios AP
 Guía de Estudio: HOMOTECIA
 Guía 7

Nombre	Curso	grupo	Fecha
Pauta	III° ____	____	____/____/2020

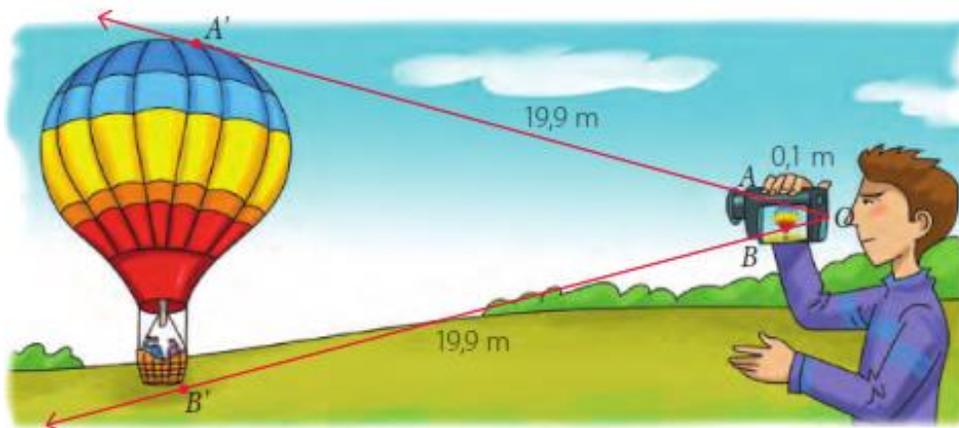
OA 11. Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.

Instrucciones: Para el desarrollo de esta guía, se estima un tiempo de 1 hora y 20 min aproximadamente.

- Necesitará el cuaderno de la asignatura, lápiz, goma y puede utilizar calculadora.
- Si no puede imprimir esta guía, se le recomienda realizar el desarrollo en su cuaderno, ya que, se solicitará más adelante
- Al envío de la próxima guía (n°8), al inicio de ésta, irá la solución de la guía anterior (guía 7)
- La Guía anterior definimos límites, pero en consideración a la publicación de los contenidos que serán considerados para la Prueba de Transición (ex Psu), es que, continuaremos trabajando este semestre con geometría y el próximo con probabilidades.

HOMOTECIA

Diego y Constanza contrataron un tour en un globo aerostático y su amigo Vicente grabó el momento en que se suben al globo.



- ¿Qué representa la distancia OA' ? ¿Y la distancia OB' ? Explica.
 La distancia OA' representa la vista de Vicente hasta el punto más alto del globo
 La distancia OB' representa la vista de Vicente hasta el punto más bajo del globo
- Suponiendo que \overline{OA} y \overline{OB} tienen la misma medida, completa las siguientes expresiones.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{20}{0,1} = 200$$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{20}{0,1} = 200$$

- ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.
 Ambos cocientes son iguales.

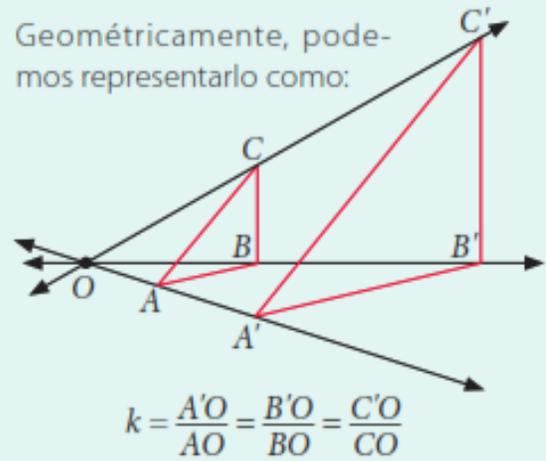
Conceptos

Una **homotecia** es una transformación geométrica que permite obtener una figura con igual forma a otra.

Dos figuras son **homotéticas** si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes estas rectas concurren en un único punto, llamado **centro de homotecia** (O).

En una homotecia, la **razón** entre la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura original se llama **razón de homotecia** (k).

Geoméricamente, podemos representarlo como:



$$k = \frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO}$$

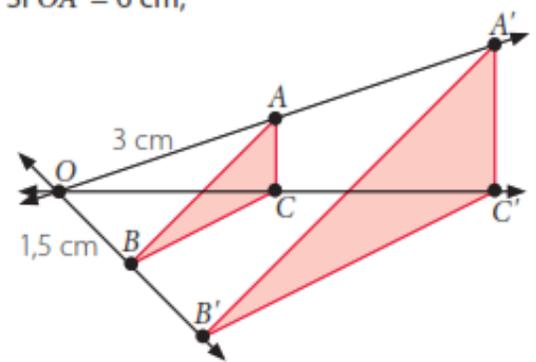
Ejemplo 1

Sobre el triángulo ABC se realizó una homotecia de centro O . Si $OA' = 6$ cm, ¿cuánto mide $\overline{BB'}$?

- 1 Al plantear la proporción, se tiene: $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{B'O}{1,5}$
- 2 Aplicando el teorema fundamental de las proporciones, se tiene: $6 \cdot 1,5 = 3 \cdot B'O \rightarrow B'O = 3$.
- 3 Ya que $OB' = OB + BB'$, se tiene que: $3 = 1,5 + BB' \rightarrow BB' = 1,5$.

PASO A PASO

Respuesta: La medida de $\overline{BB'}$ es 1,5 cm.

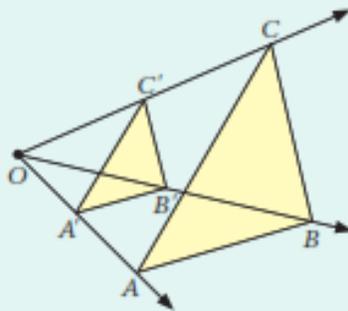


Conceptos

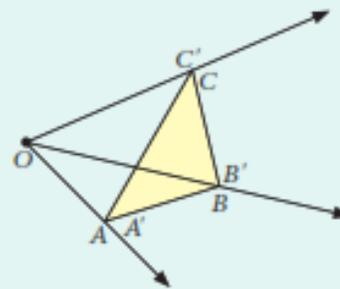
Dependiendo del valor de la razón ($k \neq 0$), se tiene lo siguiente:

1. Si $k > 0$, es una **homotecia directa** y se tienen los siguientes casos:

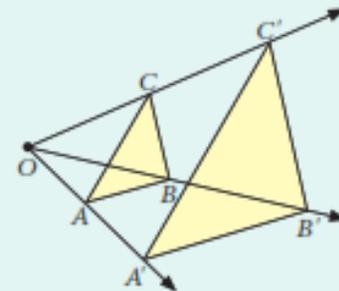
Si $0 < k < 1$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).



Si $k = 1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.

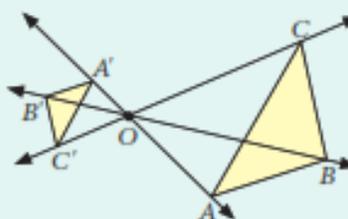


Si $k > 1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).

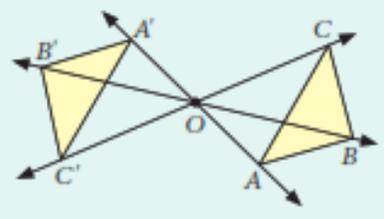


2. Si $k < 0$, es una **homotecia inversa** y se tienen los siguientes casos:

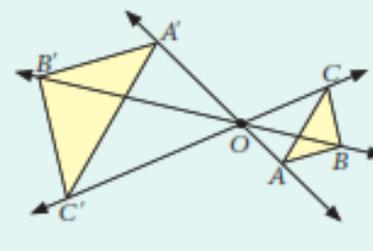
Si $-1 < k < 0$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Si $k = -1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.



Si $k < -1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Ejemplo 2

Sobre el cuadrilátero ADCB se realizó una homotecia con centro en O, resultando el cuadrilátero A'D'C'B'. ¿Cuánto es el valor de la razón de homotecia?

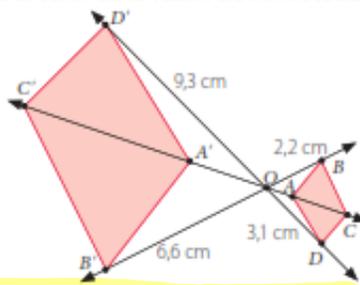
Al calcular el cociente, se tiene:

$$k = \frac{OD'}{OD} = \frac{9,3}{3,1} = 3 \text{ y } k = \frac{OB'}{OB} = \frac{6,6}{2,2} = 3$$

Ya que el centro de la homotecia está entre ambas figuras, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.

Respuesta: El valor de la razón es -3.

Si OC' mide 8,4 cm, ¿cómo calcularías la medida de OC? Explica.



$$K = \frac{OC'}{OC} \rightarrow 3 = \frac{8,4}{OC}$$

$$3OC = 8,4$$

$$OC = \frac{8,4}{3}$$

$$OC = 2,8$$

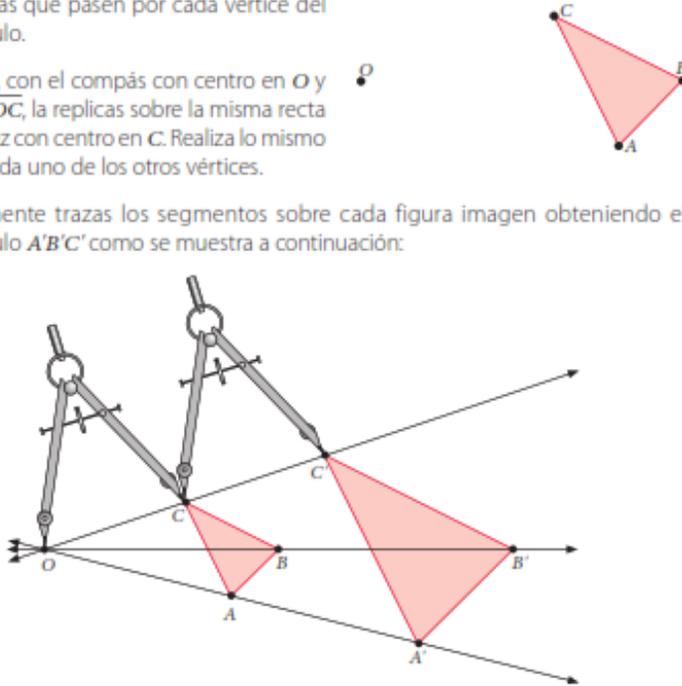
Ejemplo 3

Utiliza regla y compás para explicar cómo puedes realizar una homotecia de razón 2 y centro en O sobre el triángulo ABC.

Utilizando una regla, trazas desde el centro O rectas que pasen por cada vértice del triángulo.

Luego, con el compás con centro en O y radio OC, la replicas sobre la misma recta otra vez con centro en C. Realiza lo mismo con cada uno de los otros vértices.

Finalmente trazas los segmentos sobre cada figura imagen obteniendo el triángulo A'B'C' como se muestra a continuación:

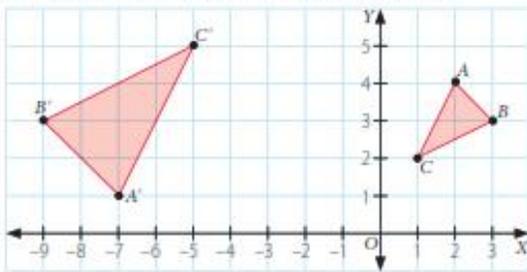


Utilizando un transportador, mide los ángulos internos y utilizando una regla mide los lados de los triángulos ABC y A'B'C'. ¿Qué puedes afirmar respecto de dichas medidas? ¿Es correcto afirmar que el lado BC // B'C'? Argumenta tu respuesta.

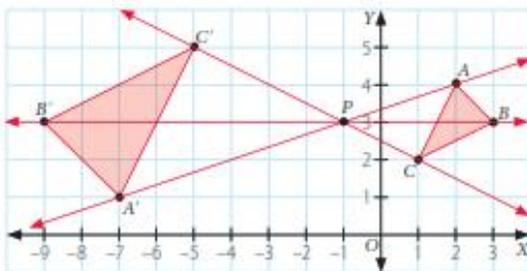
Ejemplo 5

Ejemplo 4

Al triángulo ABC se le aplicó una homotecia resultando el triángulo A'B'C'. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de homotecia P?



Para determinar las coordenadas del centro de homotecia se trazan las rectas que van de cada vértice de la figura original a la figura imagen. La intersección de dichas rectas corresponderá al centro de homotecia (P).



Respuesta: El punto del centro de homotecia es P(-1, 3).

En este caso, ¿cómo calcularías el valor de la razón de homotecia? Explica.

$$K = \frac{PA'}{PA} = \frac{6}{3} = 2$$

$$K = \frac{PB'}{PB} = \frac{8}{4} = 2$$

$$K = \frac{PC'}{PC} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ la razón de homotecia es 2

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{6,3}{4,2} = 1,5$$

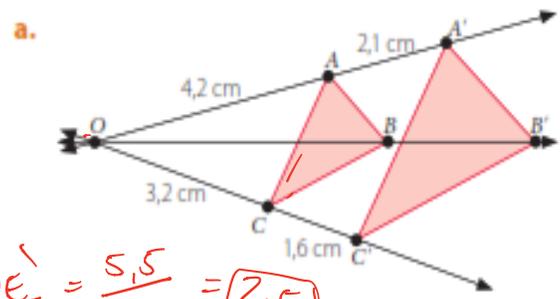
$$1,5 = \frac{C'A'}{CA} = 1,5 = \frac{C'A'}{2,2}$$

$$2,2 \cdot 1,5 = C'A' = 3,3$$

EJERCITO

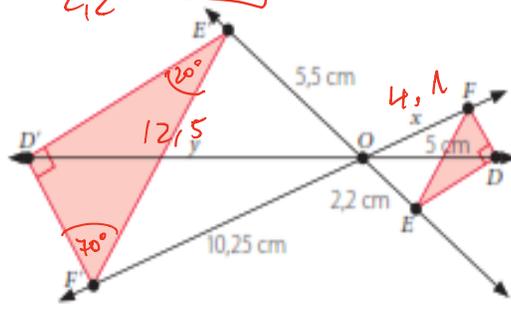
$$1,5 = \frac{OB'}{OB} = 1,5 = \frac{OB'}{5} = 7,5 = OB'$$

1. Observa cada homotecia que se aplica y luego responde.



- 1. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia? → 1,5 = k
- 2. Si OB = 5 cm, ¿cuánto mide BB'? → 2,5
- 3. Si CA = 2,2 cm, ¿cuánto mide C'A'? → 3,3
- 4. Si m(∠ABC) = 72°, ¿cuánto es la m(∠A'B'C')? → 72°

$$k = \frac{OE'}{OE} = \frac{5,5}{2,2} = 2,5$$



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia? → -2,5
- ¿Cuánto es x + y? → 16,6
- Si FE = 2,5 cm, ED = 2 cm y DF = 1,5 cm, ¿cuál es el perímetro del ΔE'D'F'? → 14,75
- Si m(∠D'E'F') = 20°, ¿cuánto es la m(∠EFD)? → 70°

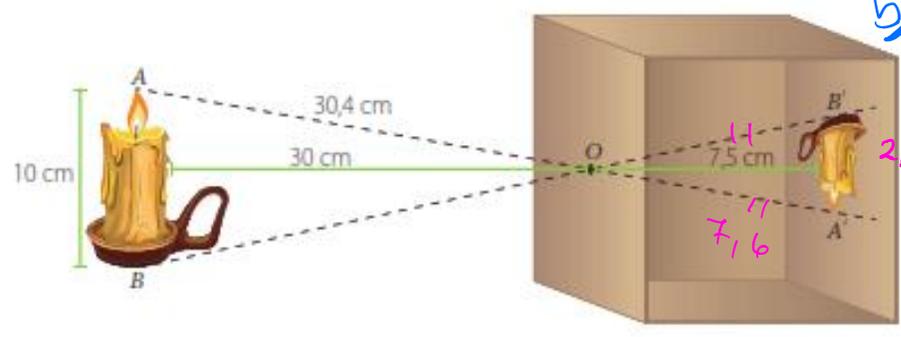
c. En la homotecia realizada en a. y en b., ¿qué puedes concluir respecto de sus ángulos internos?
¿Corresponden a una homotecia directa o inversa? Explica.

Inversa, el centro de homotecia está ubicado entre las imágenes

$$2,5 = \frac{OF'}{OF} \rightarrow 2,5 = \frac{10,25}{x} = x = \frac{10,25}{2,5} = 4,1$$

$$2,5 = \frac{OD'}{OD} \rightarrow 2,5 = \frac{y}{5} = 2,5 \cdot 5 = y = 12,5$$

2. Ciencias Una cámara oscura es un instrumento que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real utilizando principios de la óptica.



$$k = \frac{7,5}{30} = 0,25$$

$$0,25 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{10}$$

$$0,25 \cdot 10 = A'B'$$

$$2,5 = A'B'$$

- a. ¿Cuál es la clasificación de la homotecia? Inversa
- b. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia? -0,25
- c. ¿Cuánto es la medida de la proyección de la vela en la cámara oscura (B'A')? 2,5 cm
- d. Si OB = OA, ¿cuál es el perímetro del triángulo OA'B'? = 17,7 cm

$$0,25 = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA'}{30,4}$$

$$0,25 \cdot 30,4 = OA'$$

$$7,6 = OA'$$

$$7,6 + 7,6 + 2,5 = 17,7$$

3. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

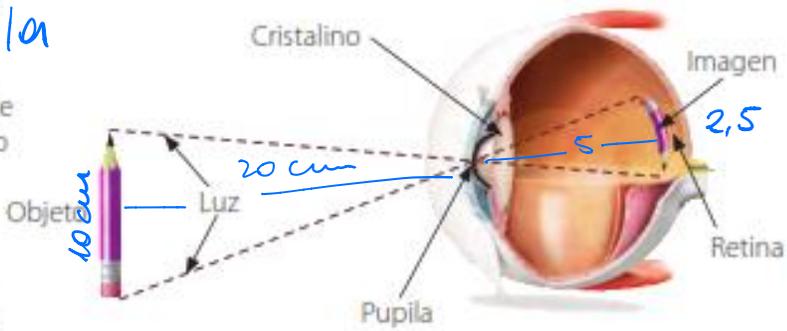
- a. Si el valor de razón de una homotecia cumple que $|k| > 1$, se tiene una reducción.
- b. Si el valor de razón de una homotecia cumple que $k > 0$, es una homotecia directa.

4. **Biología** En el proceso de la visión, la luz reflejada por los objetos ingresa a nuestro ojo por la pupila y se proyecta en la retina, la cual contiene receptores visuales, que son los encargados de transmitir la información al cerebro. El ojo humano tiene forma parecida a una esfera y tiene un radio promedio aproximado de 2,5 cm.

a. ¿Cuál es el centro de la homotecia? ¿Cómo lo supiste? Explica. *pupila*

b. En este caso, ¿el valor de la razón de homotecia es un número positivo o negativo? Argumenta. *negativo*
el 0 está entre las figuras.

c. Si se observa un lápiz que mide 10 cm de altura a 20 cm de distancia, ¿cuál será el largo de la imagen proyectada en la retina? $\rightarrow 2,5 \text{ cm}$



$$K = \frac{5}{20}$$

$$K = 0,25$$

$$0,25 \cdot 10$$

$$\underline{\quad}$$

$$2,5$$

5. **Artes visuales** El punto de fuga es el lugar geométrico que corresponde al punto donde las rectas paralelas se juntan (convergen) de acuerdo a la perspectiva que se tenga.

a. En la imagen, ¿qué elementos relacionas con segmentos que son paralelos? Explica.

b. Realiza en tu cuaderno el dibujo que se muestra y explica cuál es el punto de fuga.



No dudes en enviar
tus consultas a nuestros
correos



Matemática
Terceros Medios AP
Guía de Estudio: HOMOTECIA
Guía 8

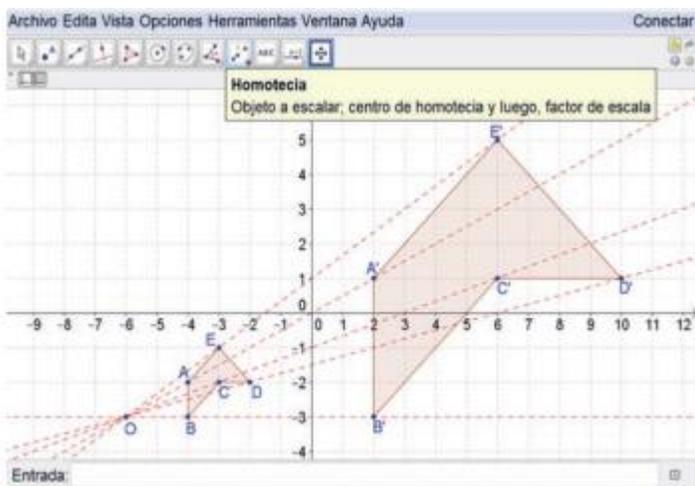
Nombre	Curso	grupo	Fecha
	III° _____	_____	____/____/2020

OA 11. Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.

Instrucciones: Para el desarrollo de esta guía, se estima un tiempo de 1 hora y 20 min aproximadamente.

- Necesitará el cuaderno de la asignatura, lápiz, goma y puede utilizar calculadora.
- Si no puede imprimir esta guía, se le recomienda realizar el desarrollo en su cuaderno, ya que, se solicitará más adelante
- Al envío de la próxima guía (n°9), al inicio de ésta, irá la solución de la guía anterior (guía 8)

HOMOTECIA

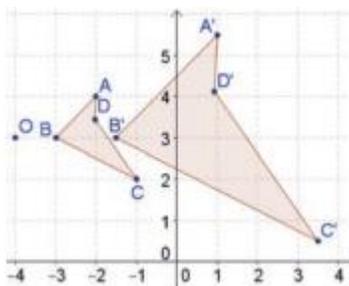


GeoGebra es un programa con el cual puedes estudiar muchos conceptos de Geometría y Álgebra. Puedes descargarlo de manera gratuita en su sitio web www.geogebra.org. Una vez descargado, intenta replicar la homotecia mostrada en la imagen. Cuando logres realizar la homotecia, selecciona el puntero y arrastra el centro de homotecia (punto O) para ver cómo se mueve la figura, mientras que la original permanece estática. Lee las formalizaciones para

ayudarte a comprender el concepto de homotecia.

ACTIVIDADES RESUELTAS

Daniela y Patricio realizaron la siguiente homotecia en GeoGebra:



¿Hay una homotecia entre las figuras?

De haber, ¿cómo se calcula la razón de homotecia?

Para saber si hay una homotecia entre las figuras, debería cumplirse que al trazar las rectas AA', BB', CC' y DD', todas contengan al centro de homotecia, en este caso, el punto O. Este procedimiento se puede hacer con Geogebra o con regla. La razón de homotecia (k) se calcula

resolviendo lo siguiente:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = k$$

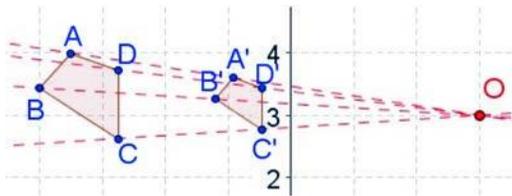
Una homotecia es una transformación geométrica que mantiene la forma de la figura a la cual se le aplicó, y que puede cambiar su tamaño, pero siempre será proporcional a la original, es decir, la figura original y la figura imagen serán semejantes

El centro de homotecia (O) es un punto del plano por el que se alinearán los vértices de las figuras origen e imagen. Este punto puede ser escogido de forma arbitraria.

La razón de homotecia (k) es la comparación, mediante la división, entre la distancia de cada vértice de la figura imagen al centro de homotecia con la distancia de cada vértice correspondiente de la figura origen al centro de homotecia. El valor de la razón de homotecia para un par de figuras, es constante.

Si $0 < k < 1$, la figura imagen es una contracción (reducción)
 De la figura origen.
 Si $k > 1$, la figura imagen es una dilatación (ampliación) de la figura origen.
 Si $k = 1$, las figuras son congruentes.

Halla el centro y la razón de homotecia entre las figuras ABCD y A'B'C'D'.



O es el centro de homotecia. Se obtuvo

Trazando las rectas AA', BB', CC' y DD'.

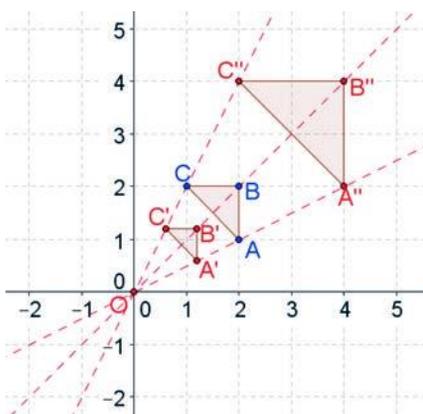
La razón de homotecia es 0,6 aproximadamente, ya que:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} \approx \frac{3,96}{6,59} \approx \frac{4,22}{7,03} \approx \frac{3,46}{5,77} \approx \frac{3,48}{5,8} \approx 0,6$$

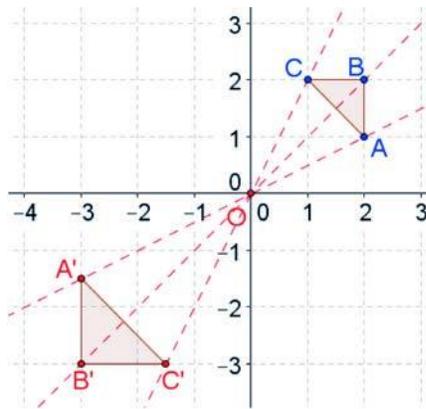
Analiza la información. Luego, resuelve.

Si el centro de homotecia está ubicado entre la figura y su imagen se dice que la homotecia es inversa; de lo contrario se denomina directa.

HOMOTECIA DIRECTA



HOMOTECIA INVERSA

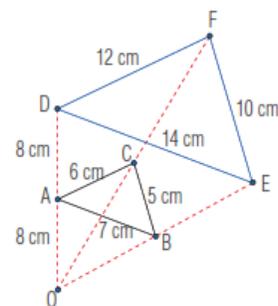


La razón de homotecia en las homotecias inversas, es negativa. Se calcula de igual forma que en las homotecias directas, pero se anteponen el signo negativo al resultado.

- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de las figuras originales en cada homotecia?
- ¿Cuál es la razón de homotecia en cada transformación realizada? No utilices regla.
- ¿Para qué valores de k, el tamaño de la figura origen aumenta, en las homotecias inversas?
- ¿Para qué valores de k, el tamaño de la figura origen disminuye, en las homotecias inversas?

Analiza la figura. Luego, responde.

- ¿Qué tipo de homotecia se aplicó, si el ΔABC es la figura origen?
- ¿Cuál es la razón de homotecia para el caso anterior?
- ¿Qué tipo de homotecia se aplicó, si el ΔABC es la figura imagen?
- ¿Cuál es la razón de homotecia para el caso anterior?
- Considera el ΔABC como figura origen y aplícale una homotecia de centro O y razón -2 .
- Respecto a la actividad anterior, ¿cómo es el área de la figura imagen obtenida, respecto a la del ΔDEF ?



Pregunta tipo PSU

Si a un triángulo ABC se le aplica una homotecia de razón $K = -\frac{2}{3}$ y centro en O, se obtiene el triángulo A'B'C'. ¿Cuál de las siguientes figuras representa mejor esta homotecia?

- A) B) C) D) E)