Colegio San Carlos de Quilicura
IIIº Medio diferenciado
Límites derivadas e integrales
KCC/ CSV /JVP /2020

Matemática
Tercero medio AP
LÍMITES
guía N°6

NOMBRE	CURSO	GRUPO	FECHA
Solución	III° ___		

OA 2: Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

Límites

A veces algo no se puede calcular directamente... ¡pero puedes saber cuál debe ser el resultado si te vas acercando más y más! A esto lo llamamos el límite de una función.

Por ejemplo, ¿cuál es el valor de $\frac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x=1$?

∴ Vamos a reemplazar "x" por "1"

Entonces tenemos:

$$\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado!

Una técnica para encontrar el verdadero valor de este ejemplo es acercándose al 1 por "valores cercanos": Lo veremos en la siguiente tabla.

"x"	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
0,99999	1,99999

* Es decir cada vez que la "x" se acerque más y más al 1, el resultado final de la operación se acercará más al 2.

A esto nos referimos cuando hablamos de límite. Y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Se lee:
El límite cuando "x" tiende a "a" de $f(x)$

En este ejemplo la forma matemática de denotarlo sería:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \longrightarrow$$

y el resultado de éste límite es 2

Vimos la forma tabular de calcular un límite, pero la manera más común de hacerlo es de forma algebraica. Y sería la siguiente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$ / Aplicando suma por su diferencia y simplificando por $(x-1)$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$ / Evaluando el límite en $x = 1$

$\therefore$ El límite pedido es igual a 2

En la mayoría de ocasiones para obtener el resultado de un límite, basta sólo con reemplazar la "X" al valor a cual tiende.
Tal como en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} x^2 - 2x + 8$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 + 8$$ / evaluando en $x = 3$

$$= 9 - 6 + 8 = 11$$

$\therefore$ El límite pedido es 11

Pero hay otras veces como en el primer ejemplo, donde al evaluar el límite este se indefine, por lo que en estas ocasiones se debe realizar un procedimiento algebraico (factorizar, simplificar, racionalizar, etc.).

Para luego evaluar y encontrar el valor del límite.

EJEMPLO:

Al evaluar nos queda:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado

En este caso lo más apropiado es racionalizar

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}}-2^2} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$$

$$= \lim_{x \to 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

$\therefore$ El límite pedido es igual a 4 ∎

Ejercicios propuestos

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{4x-8}$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-16}$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$

4) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10}$

5) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+7x+6}{x^2-1}$

6) $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{x+4}$

7) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

Desarrollo en la siguiente pág.

No olviden enviar sus dudas:

Grupo 1: Profesora Carol Soto.
Correo: profesoracarolsv@gmail.com
horario: martes y jueves de 4 a 5 PM

Grupo 2: Profesora Josimar Velásquez
Correo: josimarsancarlosdequilicura@gmail.com
Horario: martes y jueves de 4 a 5 PM

Grupo 3: Profesora Karina Cautivo
Correo: profesoracautivomatematica@gmail.com
Horario: martes y jueves de 1 a 2 PM

Solución

1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{4x-8} = \dfrac{2^2-4}{4\cdot 2-8} = \dfrac{4-4}{8-8} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminado

$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{4x-8} = \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{4\cancel{(x-2)}}$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{2+2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ $\therefore$ el límite es 1

2) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-16} = \dfrac{4^2-4\cdot 4}{4^2-16} = \dfrac{16-16}{16-16} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{(x+4)\cdot(x-4)} = \dfrac{x\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cdot\cancel{(x-4)}}$ indeterminado

$\lim_{x\to 4} \dfrac{x}{(x+4)} = \dfrac{4}{4+4} = \dfrac{4^{:2}}{8_{:2}} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ el límite es 1/2

3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \dfrac{1^2-4\cdot 1+3}{1^2+3\cdot 1-4} = \dfrac{1-4+3}{1+3-4} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \dfrac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+4)}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-3)}{(x+4)} = \dfrac{1-3}{1+4} = \dfrac{-2}{5}$ $\therefore$ el límite es $-2/5$

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10} = \dfrac{5^2-10\cdot 5+25}{5^2-3\cdot 5-10} = \dfrac{25-50+25}{25-15-10} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10} = \frac{(x-5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)}{(x+2)} = \frac{5-5}{5+2} = \frac{0}{7} = 0$$

$\therefore$ El límite es 0//

5) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1} = \dfrac{(-1)^2+7\cdot(-1)+6}{(-1)^2-1} = \dfrac{1-7+6}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+7x+6}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+6)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+6}{x-1} = \frac{-1+6}{-1-1} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$\therefore$ El límite es $-\frac{5}{2}$//

6) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{4+4} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\therefore$ el límite es 2//

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1^2-1}{\sqrt{1}-1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$\lim_{x\to 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = (1+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 2 = 4$$

$\therefore$ El límite es 4//

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \dfrac{\sqrt{9+0}-3}{0} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}\cdot\frac{(\sqrt{9+x}+3)}{(\sqrt{9+x}+3)} = \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{9+x}+3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ El límite es 1/6//

Colegio San Carlos de Quilicura
IIIº Medio diferenciado
Límites derivadas e integrales
KCC/ CSV /JVP /2020

Matemática
Terceros Medios AP
Guía de Estudio: HOMOTECIA
Guía 7

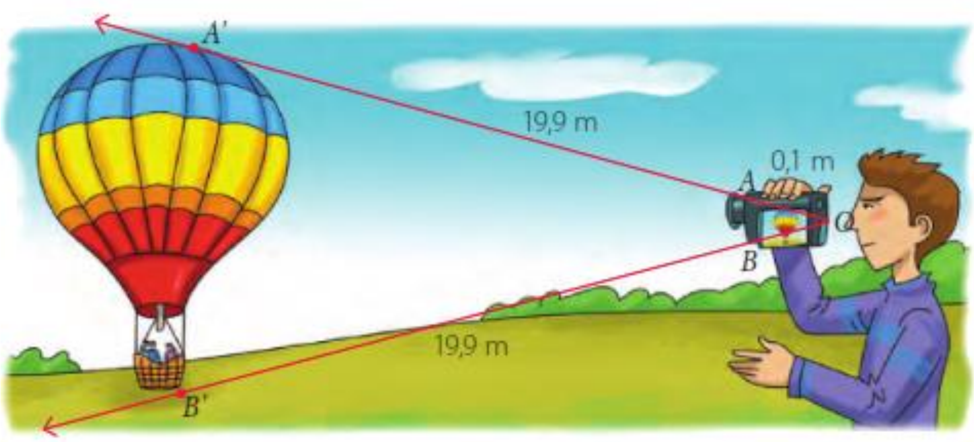
Nombre	Curso	grupo	Fecha
	IIIº ____	____	____/___/ 2020

OA 11. Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.

Instrucciones: Para el desarrollo de esta guía, se estima un tiempo de 1 hora y 20 min aproximadamente.
- **Necesitará el cuaderno de la asignatura, lápiz, goma y puede utilizar calculadora.**
- **Si no puede imprimir esta guía, se le recomienda realizar el desarrollo en su cuaderno, ya que, se solicitará más adelante**
- **Al envío de la próxima guía (n°8), al inicio de ésta, irá la solución de la guía anterior (guía 7)**
- **La Guía anterior definimos límites, pero en consideración a la publicación de los contenidos que serán considerados para la Prueba de Transición (ex Psu), es que, continuaremos trabajando este semestre con geometría y el próximo con probabilidades.**

HOMOTECIA

Diego y Constanza contrataron un tour en un globo aerostático y su amigo Vicente grabó el momento en que se suben al globo.



- ¿Qué representa la distancia OA'? ¿Y la distancia OB'? Explica.

____

____

- Suponiendo que $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ tienen la misma medida, completa las siguientes expresiones.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\square}{\square} = \square \qquad \frac{OB'}{OB} = \frac{\square}{\square} = \square$$

- ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.

____

____

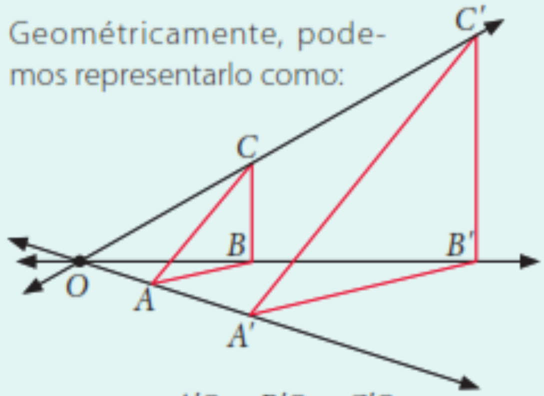
Conceptos

Una **homotecia** es una transformación geométrica que permite obtener una figura con igual forma a otra.

Dos figuras son **homotéticas** si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes estas rectas concurren en un único punto, llamado **centro de homotecia** (O).

En una homotecia, la **razón** entre la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura original se llama **razón de homotecia** (k).

Geométricamente, podemos representarlo como:



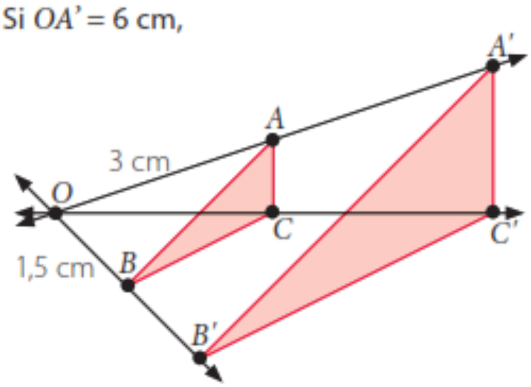
$$k = \frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO}$$

Ejemplo 1

Sobre el triángulo ABC se realizó una homotecia de centro O. Si $OA' = 6$ cm, ¿cuánto mide $\overline{BB'}$?

PASO A PASO

1. Al plantear la proporción, se tiene: $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} \blacktriangleright \frac{6}{3} = \frac{B'O}{1{,}5}$
2. Aplicando el teorema fundamental de las proporciones, se tiene: $6 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot B'O \blacktriangleright B'O = 3$.
3. Ya que $OB' = OB + BB'$, se tiene que: $3 = 1{,}5 + BB' \blacktriangleright BB' = 1{,}5$.



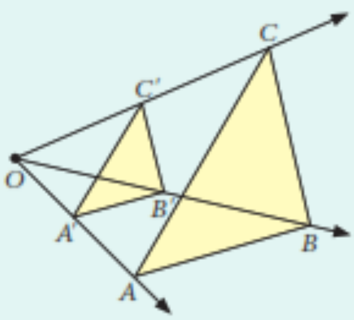
Respuesta: La medida de $\overline{BB'}$ es 1,5 cm.

Conceptos

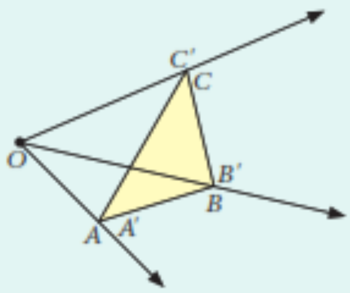
Dependiendo del valor de la razón ($k \neq 0$), se tiene lo siguiente:

1. Si $k > 0$, es una **homotecia directa** y se tienen los siguientes casos:

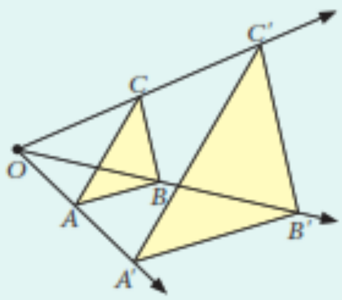
Si $0 < k < 1$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).



Si $k = 1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.

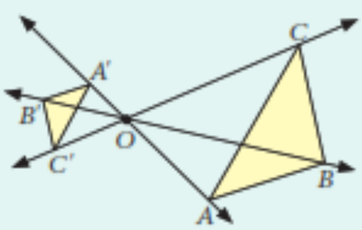


Si $k > 1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).

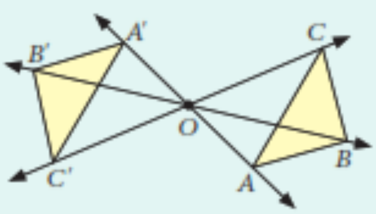


2. Si $k < 0$, es una **homotecia inversa** y se tienen los siguientes casos:

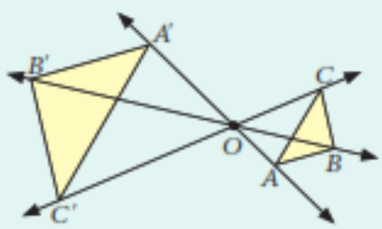
Si $-1 < k < 0$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Si $k = -1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.



Si $k < -1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Ejemplo 2

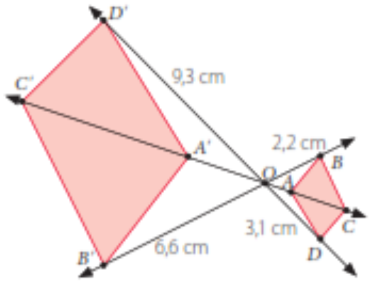
Sobre el cuadrilátero $ADCB$ se realizó una homotecia con centro en O, resultando el cuadrilátero $A'D'C'B'$. ¿Cuánto es el valor de la razón de homotecia?

PASO A PASO

1. Al calcular el cociente, se tiene:

$$k = \frac{OD'}{OD} = \frac{9{,}3}{3{,}1} = 3 \text{ y } k = \frac{OB'}{OB} = \frac{6{,}6}{2{,}2} = 3$$

2. Ya que el centro de la homotecia está entre ambas figuras, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.



Respuesta: El valor de la razón es −3.

Si OC' mide 8,4 cm, ¿cómo calcularías la medida de OC? Explica.

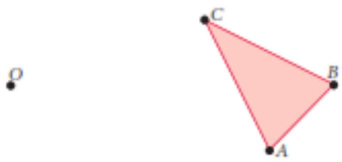
Ejemplo 3

Utiliza regla y compás para explicar cómo puedes realizar una homotecia de razón 2 y centro en O sobre el triángulo ABC.

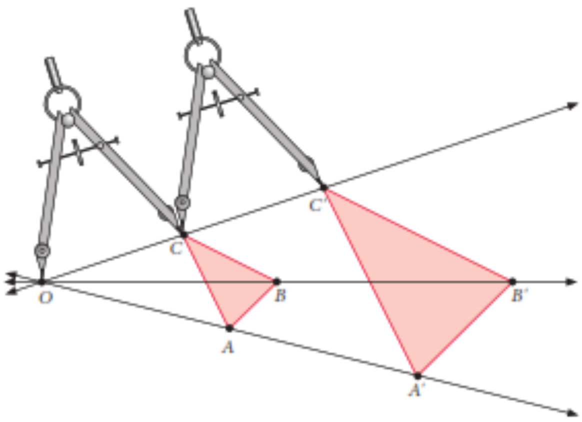
PASO A PASO

1. Utilizando una regla, trazas desde el centro O rectas que pasen por cada vértice del triángulo.

2. Luego, con el compás con centro en O y radio $\overline{OC}$, la replicas sobre la misma recta otra vez con centro en C. Realiza lo mismo con cada uno de los otros vértices.



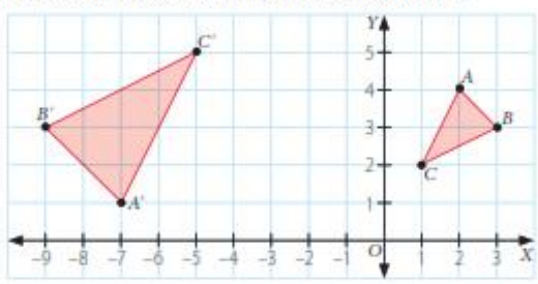
3. Finalmente trazas los segmentos sobre cada figura imagen obteniendo el triángulo $A'B'C'$ como se muestra a continuación:



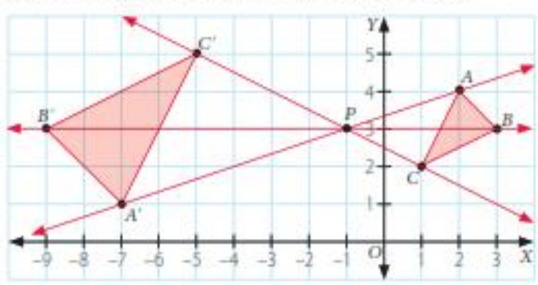
Utilizando un transportador, mide los ángulos internos y utilizando una regla mide los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$. ¿Qué puedes afirmar respecto de dichas medidas? ¿Es correcto afirmar que el lado $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$? Argumenta tu respuesta.

Ejemplo 4

Al triángulo ABC se le aplicó una homotecia resultando el triángulo $A'B'C'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de homotecia P?



Para determinar las coordenadas del centro de homotecia se trazan las rectas que van de cada vértice de la figura original a la figura imagen. La intersección de dichas rectas corresponderá al centro de homotecia (P).



Respuesta: El punto del centro de homotecia es $P(-1, 3)$.

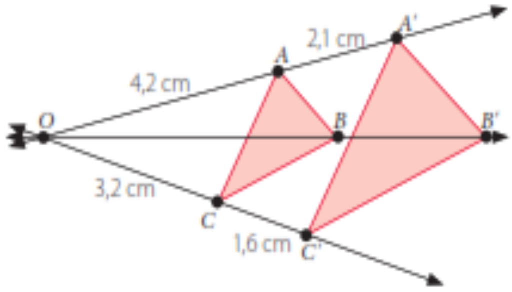
En este caso, ¿cómo calcularías el valor de la razón de homotecia? Explica.

Ejemplos

EJERCITO

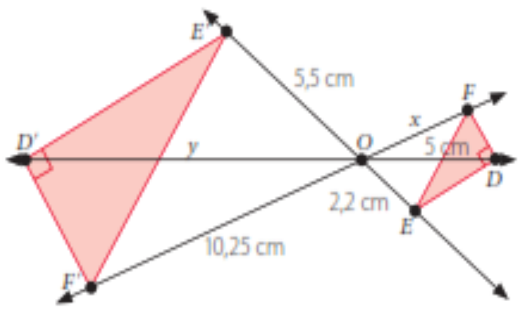
1. Observa cada homotecia que se aplica y luego responde.

a.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- Si $OB = 5$ cm, ¿cuánto mide BB'?
- Si $CA = 2{,}2$ cm, ¿cuánto mide $C'A'$?
- Si $m(\sphericalangle ABC) = 72°$, ¿cuánto es la $m(\sphericalangle A'B'C')$?

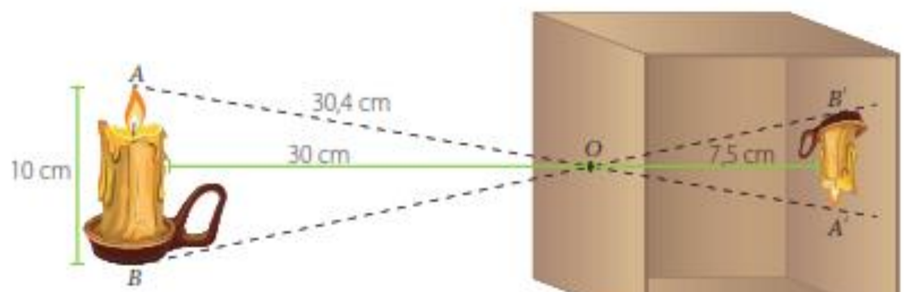
b.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- ¿Cuánto es $x + y$?
- Si $FE = 2{,}5$ cm, $ED = 2$ cm y $DF = 1{,}5$ cm, ¿cuál es el perímetro del $\Delta E'D'F'$?
- Si $m(\sphericalangle D'E'F') = 20°$, ¿cuánto es la $m(\sphericalangle EFD)$?

c. En la homotecia realizada en **a.** y en **b.**, ¿qué puedes concluir respecto de sus ángulos internos? ¿Corresponden a una homotecia directa o inversa? Explica.

2. Ciencias **Una cámara oscura es un instrumento que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real utilizando principios de la óptica.**



a. ¿Cuál es la clasificación de la homotecia?

b. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

c. ¿Cuánto es la medida de la proyección de la vela en la cámara oscura ($B'A'$)?

d. Si $OB = OA$, ¿cuál es el perímetro del triángulo $OA'B'$?

3. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

a. ◯ Si el valor de razón de una homotecia cumple que $|k| > 1$, se tiene una reducción.

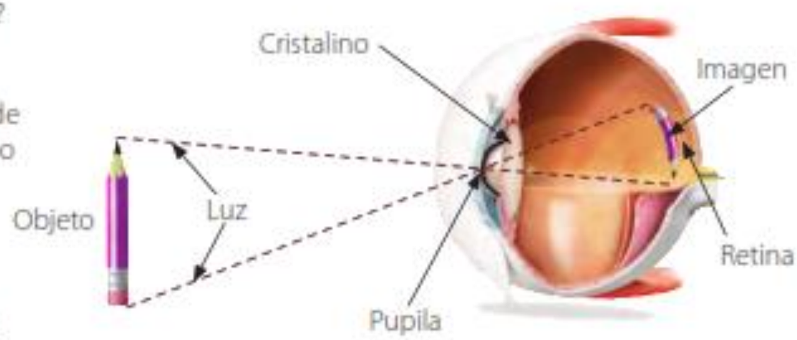
b. ◯ Si el valor de razón de una homotecia cumple que $k > 0$, es una homotecia directa.

4. **Biología** **En el proceso de la visión, la luz reflejada por los objetos ingresa a nuestro ojo por la pupila y se proyecta en la retina, la cual contiene receptores visuales, que son los encargados de transmitir la información al cerebro. El ojo humano tiene forma parecida a una esfera y tiene un radio promedio aproximado de 2,5 cm.**

a. ¿Cuál es el centro de la homotecia? ¿Cómo lo supiste? Explica.

b. En este caso, ¿el valor de la razón de homotecia es un número positivo o negativo? Argumenta.

c. Si se observa un lápiz que mide 10 cm de altura a 20 cm de distancia, ¿cuál será el largo de la imagen proyectada en la retina?



5. **Artes visuales** **El punto de fuga es el lugar geométrico que corresponde al punto donde las rectas paralelas se juntan (convergen) de acuerdo a la perspectiva que se tenga.**

a. En la imagen, ¿qué elementos relacionas con segmentos que son paralelos? Explica.

b. Realiza en tu cuaderno el dibujo que se muestra y explica cuál es el punto de fuga.

No dudes en enviar tus consultas a nuestros correos